

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V.
Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik
Lilienthalplatz 7, 38108 Braunschweig

Aufgabensammlung

Übung *Grundlagen der Aeroakustik*

TU Braunschweig, Wintersemester 2009/2010

Vorlesung: Prof. Dr.-Ing. Jan Delfs
Übung: Dipl.-Ing. Marcus Bauer

1. Doppelter Schalldruck-Effektivwert

Der Effektivwert des Schalldruckes wird verdoppelt. Wie ändert sich der Schalldruckpegel ?

2. Doppelte Schallintensität

Der Betrag der Schallintensität wird verdoppelt.

- a) Wie ändert sich der Schallintensitätspegel ?
- b) Im einfachen Fall einer sog. ebenen Schallwelle besteht zwischen dem Betrag I der Schallintensität und dem Schalldruck-Effektivwert der Zusammenhang $I = \tilde{p}^2/Z_0$. (Bei der Konstanten $Z_0 = \rho_0 a_0$ handelt es sich um die sog. Freifeldimpedanz, siehe später in Vorlesung.) Wie ändern sich damit \tilde{p} und der Schalldruckpegel L_p bei der Verdopplung von I ?

3. Effektivwert eines reinen Tones

Berechnen Sie den Effektivwert des reinen Tones $p'(t) = A \sin(\omega t)$!

4. Zusammengesetztes Drucksignal

Es ist folgendes Drucksignal gegeben:

$$p(t) = C + A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi).$$

- Wie groß ist das Effektivwertquadrat dieses Signales ?
- Wie groß ist der Schalldruckpegel dieses Signales ?
- Es gelte speziell: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $A_1 = A_2 = A$. Berechnen Sie die Differenz ΔL_p zum Schalldruckpegel eines reinen Tones, der ebenfalls die Amplitude A besitzt (siehe Aufgabe 3) ! Stellen Sie ΔL_p als Funktion des Phasenwinkels φ dar !

5. Lautheit I

Um wieviel lauter wird ein reiner Ton bei $f_1 = 3000$ Hz gegenüber einem reinen Ton bei $f_2 = 300$ Hz empfunden, wenn beide Töne einen identischen Schalldruckpegel von $L_{p1} = L_{p2} = 100$ dB aufweisen ?

6. Lautheit II

Welchen Schalldruckpegel L_{p1} hat ein reiner Ton bei $f_1 = 100$ Hz, der genauso laut empfunden wird, wie ein reiner Ton bei $f_2 = 1000$ Hz mit einem Schalldruckpegel von $L_{p2} = 70$ dB ?

7. Pegelmittelwert

Berechnen Sie den Pegelmittelwert der Schalldruckpegel $L_{p1} = 80$ dB, $L_{p2} = 85$ dB und $L_{p3} = 90$ dB

- näherungsweise durch arithmetische Mittelung,
- exakt durch Mittelung der zugrundeliegenden Schalldruck-Effektivwertquadrate unter der Annahme unkorrelierter Signale !

8. Gesamtschalldruckpegel

Es wurden folgende Oktavbandpegel gemessen:

f_i^c in Hz:	125	250	500	1000	2000	4000	8000
$L_{p1/1}^i$ in dB:	68.0	70.5	72.5	77.0	75.5	71.5	68.5

Wie groß ist der Gesamtschalldruckpegel?

9. Weißes Rauschen

Ein Signal besitze ein konstantes Leistungsdichtespektrum $\hat{P}(f) = P_0$ (ideales weißes Rauschen).

- Berechnen Sie die Terz- und Oktavbandpegel L_{pm}^i dieses Signals !
- Wie ändert sich der Terz- bzw. Oktavbandpegel beim Übergang vom Frequenzband i auf das Frequenzband $i + 1$?
- Skizzieren Sie das Oktavpegelspektrum $L_{p1/1}^i$!
- Wieso bezeichnet man dieses Signal als „Weißes Rauschen“ ?
- Existiert ideales weißes Rauschen in der Praxis ? Wie groß ist sein Effektivwertquadrat ?

10. Rosa Rauschen

Ideales Rosa Rauschen ist ein stochastisches Signal mit konstanten m-Band Pegeln L_{pm}^i .

- Berechnen Sie (für $m = 1$) das Verhältnis $\frac{\hat{P}(f_i^u)}{\hat{P}(f_i^l)}$ und skizzieren Sie davon ausgehend das Leistungsdichtespektrum $\hat{P}(f)$! Lösungshinweise:
 - Es gilt: $L_{pm}^i = \text{const.} \Rightarrow \tilde{p}_i^2 = \text{const.} \Rightarrow \frac{d\tilde{p}_i^2}{df_i^c} = 0$,
 - $\tilde{p}_i^2 = \int_a^b \hat{P}(f) df$, wobei $a := f_i^l = 2^{-m/2} f_i^c$ und $b := f_i^u = 2^{m/2} f_i^c$.
- Wieso bezeichnet man dieses Signal als „Rosa Rauschen“ ?
- Existiert ideales rosa Rauschen in der Praxis ? Wie groß ist sein Effektivwertquadrat ?

11. Grundgleichungen in primitiver Form

Die strömungsmechanischen Grundgleichungen¹ sind gegeben durch die Kontinuitätsgleichung (31), die Impulsgleichungen (32) und die Energiegleichung (33). Die Gleichungen (31)-(33) sind in konservativer Form. Als Ausgangspunkt für die Akustik eignet sich die primitive Form jedoch besser.

- Leiten Sie die primitive Form (35) der Kontinuitätsgleichung her !
- Leiten Sie die primitive Form (36) der Impulsgleichungen ab (siehe auch Hinweise im Vorlesungsskript) !

¹Nummerierung der Gleichungen (hoffentlich) wie im Vorlesungsskript

12. Schallgeschwindigkeit in Luft

Unter Normalbedingungen gilt für Luft:

$$\begin{aligned}p_0 &= 1.01325 \cdot 10^5 \text{ Pa} \\ \varrho_0 &= 1.292 \text{ kg/m}^3 \\ T_0 &= 273.15 \text{ K.}\end{aligned}$$

Wie groß ist die Schallgeschwindigkeit

- unter diesen Normalbedingungen ?
- bei einer Temperaturerhöhung auf 25°C bzw. 350°C ?
- bei gleicher Temperatur, aber doppeltem Luftdruck ?

13. Lineare Impulsstörungsgleichungen I

Leiten Sie die Impulsstörungsgleichungen (55) aus den Impulsgleichungen (48) durch Linearisierung um eine zeitunabhängige Grundströmung her ! Verwenden Sie den Standard-Störungsansatz aus der Vorlesung:

- Aufspaltung der Variablen mittels des Parameters ε ($0 \leq \varepsilon \ll 1$), z.B. $p = p_0 + \varepsilon p'$;
- Einsetzen dieser Aufspaltung in (48) liefert unmittelbar eine Funktion $\vec{N}(\varepsilon)$, wobei gilt: $\vec{N}(\varepsilon) = 0$;
- Taylorentwicklung von $\vec{N}(\varepsilon)$ um $\vec{N}(\varepsilon = 0)$;
- Linearisierung durch Annahme $\varepsilon \ll 1$ (kleine Störungen) in der Taylor-Reihe.

14. Lineare Impulsstörungsgleichungen II

Leiten Sie die Impulsstörungsgleichungen (55) aus den Impulsgleichungen (48) durch Linearisierung um eine zeitunabhängige Grundströmung her ! Verwenden Sie hier nicht wie in Aufgabe 13 den Standard-Störungsansatz, sondern gehen Sie stattdessen folgendermaßen vor:

- Variablen *ohne* Verwendung des Parameters ε aufspalten, d.h. $b = b_0 + b'$, wobei $b \in \{\varrho, \mathbf{v}, p, \mathbf{f}\}$;
- Linearisieren u.a. mit Hilfe der Annahme $|b'| \ll |b_0|$ (Vernachlässigen von „Strichprodukten“.)

15. Ebene Schallwelle, Kenngrößen

Eine in Luft fortschreitende, ebene Schallwelle wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$p'(x, t) = 6.25 \exp[i(471.2t - 1.37x)].$$

Es gilt: p' in Pa, t in s, x in m, $\rho_0 = 1.292 \text{ kg/m}^3$. Berechnen Sie

- a) die Frequenz f ,
- b) die Wellenlänge λ ,
- c) die Schallgeschwindigkeit a_0 ,
- d) die Umgebungstemperatur T_0 ,
- e) den Effektivwert \tilde{p} des Schalldruckes,
- f) den Effektivwert \tilde{v} der Schallschnelle,
- g) die Schallintensität I ,
- h) den Schalldruckpegel L_p ,
- i) die physikalische Lösung $p'(x, t)_{\text{phys}}$!

16. Helmholtzgleichung

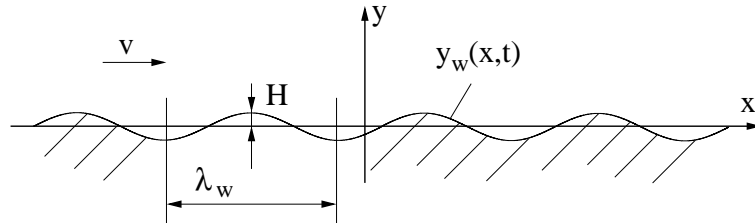
Leiten Sie die Helmholtzgleichung (69) aus der Wellengleichung (61) für die Schalldruckschwankungen her !

Lösungshinweis: Ersetzen Sie in Gleichung (61) $p'(\mathbf{x}, t)$ und $Q_p(\mathbf{x}, t)$ entsprechend der Gleichung (23) für die Fourier-Rücktransformation, d.h.:

$$\begin{aligned} p'(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{p}(\mathbf{x}, \omega) \exp(i\omega t) d\omega \\ Q_p(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{Q}_p(\mathbf{x}, \omega) \exp(i\omega t) d\omega \end{aligned}$$

17. Wellige Wand

Eine unendlich ausgedehnte, zweidimensionale, wellige Wand bewege sich mit der Geschwindigkeit $v > 0$ gleichförmig in positive x -Richtung, siehe Abbildung.



In komplexer Schreibweise sei die Wandoberfläche durch die Funktion

$$y_w(x, t) = H \exp(i(\alpha_w vt - \alpha_w x))$$

gegeben, wobei $\alpha_w = 2\pi/\lambda_w > 0$ die Wellenzahl der Wandoberfläche bezeichnet. Die Höhe H sei klein. Für das Umgebungsmedium wird angenommen, dass es ruht, $\mathbf{v}_0 = 0$, und dass seine Dichte ρ_0 konstant ist.

- a) Berechnen Sie das resultierende Geschwindigkeitspotentialfeld für die Fälle $M = v/a_0 < 1$ und $M > 1$, wobei a_0 die Schallgeschwindigkeit im Umgebungsmedium, und M die Machzahl der Wand ist !

Lösungshinweise:

1. Verwenden Sie folgenden Lösungsansatz:

$$\Phi = A \exp(i\omega t - i\alpha x - i\beta y).$$

2. Setzen Sie die y -Komponente der Schwingschnelle der Wand (v'_{yw}) der Schallschnelle (v'_y) gleich; da H klein ist, gilt näherungsweise: $v'_{yw} = v'_y(y = 0)$. Es ergeben sich spezielle Lösungen für ω und α .
3. Berechnen Sie konkrete Lösungen für β bzw. A , indem Sie zunächst den obigen Ansatz für Φ in die entsprechende zweidimensionale, homogene Wellengleichung einsetzen; es ergibt sich die Dispersionsrelation (75). Setzen Sie dann in die Dispersionsrelation die unter Schritt 2 berechneten Lösungen für ω und α ein. Es ergeben sich zwei mögliche Lösungen für β . Wählen Sie für die Fälle $M < 1$ und $M > 1$ jeweils die physikalisch sinnvolle Lösung aus.

Zur Kontrolle: es ergibt sich:

$$\Phi = \frac{vH}{i\sqrt{1-M^2}} \exp(-\alpha_w y \sqrt{1-M^2}) \exp(i\alpha_w vt - i\alpha_w x); \quad M < 1,$$

$$\Phi = -\frac{vH}{\sqrt{M^2-1}} \exp(-i\alpha_w y \sqrt{M^2-1}) \exp(i\alpha_w vt - i\alpha_w x); \quad M > 1.$$

- b) Berechnen Sie anhand der entsprechenden Lösung der Teilaufgabe a) den physikalischen Lösungsanteil des Schwankungsdruckfeldes p' für den Fall $M < 1$! Handelt es sich um Schallwellen² ? Veranschaulichen Sie sich das Feld anhand einer Skizze !
- c) Berechnen Sie anhand der entsprechenden Lösung der Teilaufgabe a) auch den physikalischen Lösungsanteil von p' für $M > 1$! Handelt es sich um Schallwellen ? Veranschaulichen Sie sich das Feld anhand einer Skizze !

18. Lighthill-Analogie für Druckschwankungen

Sir Michael James Lighthill veröffentlichte im Jahre 1952 die berühmte inhomogene Wellengleichung (235) für *Dichteschwankungen*:

$$\frac{\partial^2 \varrho'}{\partial t^2} - a_\infty^2 \Delta \varrho' = \nabla \cdot \nabla \cdot (\varrho \mathbf{v} \mathbf{v} + (p' - a_\infty^2 \varrho') \mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}).$$

Er erhielt sie durch einfache Umformung der Navier-Stokes Gleichungen. Leiten Sie analog aus den Navier-Stokes Gleichungen die inhomogene Wellengleichung (237) für *Druckschwankungen* her! Diese lautet:

$$\frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \nabla \cdot \nabla \cdot (\varrho \mathbf{v} \mathbf{v} - \boldsymbol{\tau}) + \frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (p' - a_\infty^2 \varrho').$$

Lösungshinweis: Der einzige Unterschied zur Herleitung von Gleichung (235) besteht darin, dass ein anderer Term als $a_\infty^2 \Delta \varrho$ subtrahiert wird.

19. Lighthill-Analogie - Anwendung auf Strahlärm

Durch eine Vergrößerung des Strahldurchmessers D soll die Schallabstrahlung eines Triebwerksstrahls der ursprünglichen Geschwindigkeit U_s bei gleichbleibendem Schub reduziert werden. Mit welcher Minderung des Schallintensitätspegels L_I kann bei einer Vergrößerung des Durchmessers auf $D_2 = 1.5 D_1$ gerechnet werden?

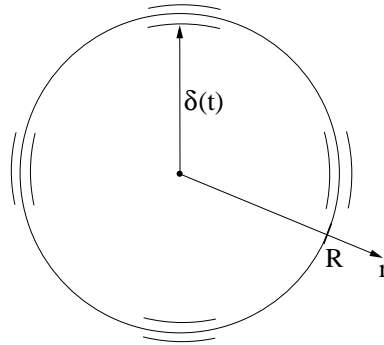
Lösungshinweise:

- Verwenden Sie die aus der Lighthill'schen akustischen Analogie abgeleitete Abschätzung für die Schallintensität: $I \propto \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} \frac{\varrho_\infty}{a_0^5} D^2 U_s^8$.
- Für den Schub des Freistrahles gilt: $F = \varrho U_s^2 A = \varrho U_s^2 \frac{\pi}{4} D^2$.

²Definition Schallwelle: Wellenartige Ausbreitung kleiner Druck- und Dichtestörungen mit Schallgeschwindigkeit a_0 (ruhendes Umgebungsmedium).

20. Atmende Kugel (Monopolmodell)

Eine hohle Kugel befindet sich in einem ruhenden Medium ($\mathbf{v}_0 = 0$) mit konstanter Dichte ρ_0 , siehe Abbildung. Die Kugeloberfläche oszilliere konphas um den zeitgemittelten Kugelradius R , und zwar mit dem Maximalausschlag $A_R \ll R$ und der Kreisfrequenz Ω . Für den zeitabhängigen Radius $\delta(t)$ der Kugeloberfläche gilt somit in komplexer Schreibweise: $\delta(t) = R + A_R \exp(i\Omega t)$.



- a) Berechnen Sie das von der Kugel abgestrahlte Schalldruckfeld in komplexer Darstellung !

Lösungshinweise:

1. Berechnen Sie zunächst das Geschwindigkeitspotential und verwenden Sie dazu folgenden Lösungsansatz:

$$\Phi = \frac{A_\Phi}{r} \exp(i\omega t - ikr), \quad r \geq \delta(t).$$

2. Ermitteln Sie die spezielle Lösung für Φ , d.h. bestimmen Sie A_Φ und ω ! Dazu wird einerseits aus dem Ansatz für Φ allgemein die radiale Schallschnelle v'_r berechnet, und andererseits aus $\delta(t)$ die radiale Schwinggeschwindigkeit v'_K der Kugeloberfläche.

Diese beiden Schnellen sind an der Kugeloberfläche identisch, d.h. es gilt mit $A_R \ll R$ näherungsweise: $v'_K(r = \delta(t)) = v'_r(r = R)$.

3. Berechnen Sie schließlich aus der speziellen Lösung für das Geschwindigkeitspotential Φ das resultierende Schalldruckfeld p' !

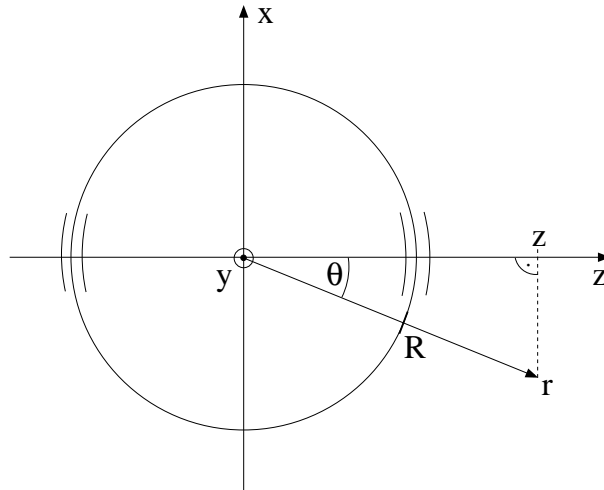
Zur Kontrolle: Es sollte sich ergeben:

$$p'(r, t) = \frac{\rho_0 \Omega^2 A_R R}{r(-ik - \frac{1}{R})} \exp(i\Omega t - ik(r - R)), \quad r \geq \delta(t).$$

- b) Durch eine atmende Kugel lässt sich Schallentstehung durch Pulsation bzw. durch pulsierenden Ausfluss modellieren. Welche Schallquellen könnte man damit also konkret nachbilden?

21. Oszillierende Kugel (Dipolmodell)

Eine starre, masselose Kugel mit Radius R befinde sich in einem ruhenden Medium ($\mathbf{v}_0 = 0$) mit konstanter Dichte ρ_0 , siehe Abbildung. Zur Beschreibung werden (ortsfeste) Kugelkoordinaten (r, θ, φ) verwendet. Es gilt: $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Der Winkel φ ist nicht abgebildet, er befindet sich in der Ebene $z = 0$.



Die Kugel oszilliert mit der maximalen Auslenkung $A_z \ll R$ und der Kreisfrequenz Ω in z -Richtung. Für die Auslenkung der Kugeloberfläche in dieser Richtung gilt somit: $\delta_{zK}(t) = A_z \exp(i\Omega t)$.

- a) Als Lösungsansatz zur Berechnung des resultierenden Geschwindigkeitspotentials Φ dient die z -Ableitung $\frac{\partial \Phi^*}{\partial z}$ des Ansatzes Φ^* , der bei der atmenden Kugel gemacht wurde:

$$\Phi^* = \frac{A_\Phi}{r} \exp(i\omega t - ikr), \quad r \geq R.$$

Wie lautet demnach der für die oszillierende Kugel verwendete Ansatz (in Kugelkoordinaten) ?

- b) Als spezielle Lösung für das Geschwindigkeitspotential erhält man schließlich auf ähnlichem Wege wie in den Aufgaben 17 und 20 folgenden Ausdruck:

$$\Phi = -\frac{i\Omega A_z (ik + \frac{1}{r})}{r(\frac{2}{R^3} - \frac{k^2}{R} + \frac{2ik}{R^2})} \exp(i\Omega t - ik(r - R)) \cos \theta, \quad r \geq R.$$

Welches Schallschnellefeld \mathbf{v}' wird demnach von der oszillierenden Kugel generiert (Kugelkoordinaten) ? Wie vereinfacht es sich für große Abstände von der Kugel ?

- c) Durch eine oszillierende Kugel lässt sich Schallentstehung durch eine Wechselkraft modellieren. Welche Schallquellen könnte man damit also konkret nachbilden ?

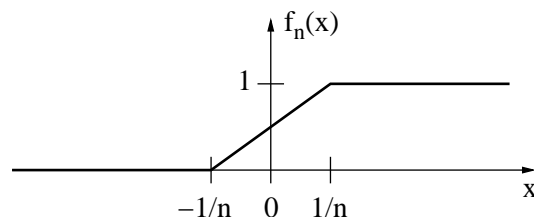
22. Multipole, Richtcharakteristiken

- a) Berechnen Sie aus Gleichung (147) den Richtungsfaktor $D(\theta) = \frac{\bar{p}(\theta)}{\bar{p}(\theta)_{max}}$ eines Monopols und eines Dipols und stellen sie die Ergebnisse graphisch als Richtcharakteristiken dar ! Lösungshinweise:
- Verwenden Sie zur Auswertung von (147) ein allgemeines, nicht näher bestimmtes Monopolmoment $m_{000}(\tau_0)$ bzw. Dipolmoment $m_{001}(\tau_0)$ und gehen Sie vereinfachend davon aus, dass $\xi_0 = \mathbf{0}$ gilt.
 - Die Koordinaten seien wie in Aufgabe 21 festgelegt, es gilt: $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$.
- b) Vergleichen Sie die Richtungsfaktoren aus Teilaufgabe a) mit denen der atmenden bzw. oszillierenden Kugel, siehe die Aufgaben 20 und 21 !

23. Dirac-Funktion $\delta(x)$

Gegeben ist die abgebildete Funktion $f_n(x)$, mit der man den Einheitssprung $H(x)$ als Grenzwert der Funktionenfolge $\{f_n(x)\}$ für $n \rightarrow \infty$ beschreiben kann, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = H(x)$. Es gilt:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x < -\frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}x + \frac{1}{2} & -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & x > \frac{1}{n} \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$



- a) Zeigen Sie, dass durch Ableiten der Funktion $f_n(x)$ nach x eine neue Funktion $g_n(x)$ entsteht, für die gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \delta(x)$!
- b) Zeigen Sie die Gültigkeit der Ausblendeigenschaft (108) für den Diracstoß anhand der Funktion $g_n(x)$ aus Teilaufgabe a) !

Lösungshinweise:

- Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz lassen sich Integration und Grenzwertbildung vertauschen:

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(x) dx.$$

- Mittelwertsatz der Integralrechnung: Für eine im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion $s(x)$ existiert mindestens eine Zwischenstelle $\xi \in [a, b]$, so dass

$$\int_a^b s(x) dx = s(\xi)(b - a).$$

24. Vektorschreibweise vs. Indexschreibweise

Neben der bisher verwendeten Vektorschreibweise zur Darstellung von Differentialoperatoren bzw. Rechenoperationen mit Matrizen und Vektoren tritt in der aeroakustischen Fachliteratur auch sehr häufig die Indexschreibweise auf.

Dabei wird durch die Indices ein bestimmtes Element eines Vektors oder einer Matrix angesprochen. Bei T_{ij} handelt es sich beispielsweise um das Element der i -ten Zeile und j -ten Spalte der zum Tensor \mathbf{T} gehörigen Matrix, d.h. im Falle von zwei Indices beschreibt der erste Index die Zeile, der zweite die Spalte. Außerdem ist die Einsteinsche Summenkonvention zu beachten, falls ein Index doppelt auftritt; mit $i \in \{1, 2\}$ gilt beispielsweise: $a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

- a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{T}.$$

Lösungshinweis: Vereinfachend gelte wieder: $i, j \in \{1, 2\}$. Für den Nabla-Operator gelte entsprechend:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

d.h. es werden zweidimensionale kartesische Koordinaten betrachtet.

- b) \mathbf{T} sei nun konkret der Lighthill'sche Spannungstensor, d.h.

$$\mathbf{T} = (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + (p' - a_\infty^2 \rho') \mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}).$$

Welche Form hat ein Element T_{ij} dieses Tensors?

25. Leistungsbetrachtung oszillierende Kugel

Berechnen Sie die mechanische (Wirk-)Leistung P_{mech} , die aufzubringen ist, um die masselose Kugel aus Aufgabe 21 oszillieren zu lassen und vergleichen Sie sie mit der Schalleistung P_{ak} im Fernfeld! Welche Leistungen ergeben sich für den Spezialfall eines inkompressiblen Mediums ? Verwenden Sie die in Aufgabe 21 angegebene spezielle Lösung für das Geschwindigkeitspotential Φ .