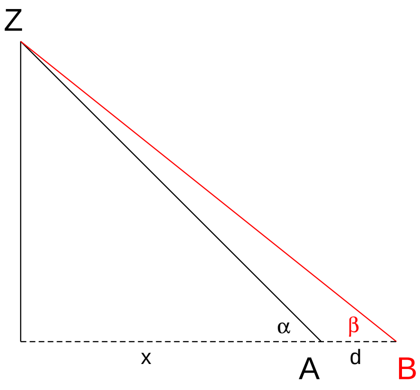
Übungen zu Physik 1 für Ingenieure – Musterlösung Blatt 1

Aufgabe 1 – Triangulierung



$\alpha = 2°51'44.6'' = 2.86238\bar{8}°, \quad \tan\alpha = 0.0499997$
$\beta = 2°51'24.1'' = 2.856694\bar{4}°, \quad \tan\beta = 0.0499001$
zwei Gleichungen:
$\tan\alpha = h/x$ (I),
$\tan\beta = h/(x+d)$ (II),
für zwei Unbekannte h und x;
(I) nach x auflösen: $x = h/\tan\alpha$, und in (II) einsetzen,
$\tan\beta = \frac{h}{(h/\tan\alpha)+d}$, liefert $\tan\beta\left(\frac{h}{\tan\alpha}+d\right) = h$,
ausmultiplizieren, $h\frac{\tan\beta}{\alpha} + d\tan\beta = h$, und sortieren,
$h\left(1 - \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\right) = d\tan\beta$, liefert $\boxed{h = d\frac{\tan\beta}{1-\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}}}$
Mit den Zahlenwerten ergibt sich $h = 2.50$km.
Eine ähnliche Ableitung ergibt für den Abstand zur Zugspitze
$x = \frac{d}{\tan\alpha/\tan\beta - 1} = 50.1$km.

Hinweis: In der Vermessungskunde wird diese Methode verwendet, und das Winkelmessinstrument ist in diesem Fall als *Theodolit* bekannt.

Aufgabe 2 – Fehlerrechnung

(a) arithmetisches Mittel

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} x_i$$

für Weitspringer A:
$\bar{x}_A = \frac{1}{6}(7.10\text{m} + 6.83\text{m} + 7.03\text{m} + 6.84\text{m} + 7.25\text{m} + 6.95\text{m}) = \underline{\underline{7.00\text{m}}}$
und für Weitspringer B:
$\bar{x}_B = \frac{1}{6}(6.99\text{m} + 7.08\text{m} + 6.65\text{m} + 7.15\text{m} + 7.23\text{m} + 6.90\text{m}) = \underline{\underline{7.00\text{m}}}$
Beide springen im Durchschnitt gleich weit.

(b) Standardabweichung

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x})^2}$$

für Weitspringer A:
$s_A = \sqrt{\frac{1}{5}\left[(7.10\text{m} - 7.00\text{m})^2 + (6.83\text{m} - 7.00\text{m})^2 + (7.03\text{m} - 7.00\text{m})^2 + (6.84\text{m} - 7.00\text{m})^2 + (7.25\text{m} - 7.00\text{m})^2 + (6.95\text{m} - 7.00\text{m})^2\right]}$
$s_A = \sqrt{0.1304/5}\,\text{m} = \underline{\underline{0.16\text{m}}}$
für Weitspringer B:
$s_B = \sqrt{\frac{1}{5}\left[(6.99\text{m} - 7.00\text{m})^2 + (7.08\text{m} - 7.00\text{m})^2 + (6.65\text{m} - 7.00\text{m})^2 + (7.15\text{m} - 7.00\text{m})^2 + (7.23\text{m} - 7.00\text{m})^2 + (6.90\text{m} - 7.00\text{m})^2\right]}$
$s_B = \sqrt{0.2144/5}\,\text{m} = \underline{\underline{0.21\text{m}}}$
Insgesamt ergibt sich $x_A = 7.00 \pm 0.16$m und $x_B = 7.00 \pm 0.21$m, und damit ist Weitspringer A konstanter in seiner Leistung, da $s_A < s_B$.

Aufgabe 3 – Radiokarbonmethode

(a) Für unsere Abschätzung reicht es aus, mit einer molaren Masse für Kohlenstoff zu rechnen, die 12g/mol beträgt; 1kg reiner Kohlenstoff enthält demnach mit der Avogadro-Zahl N_A

$$\frac{1000\text{g}}{12\text{g/mol}} = 83.\bar{3}\text{mol und } 83.\bar{3}\text{mol} \times N_A = 83.\bar{3}\text{mol} \times 6.022 \cdot 10^{23}\,\text{Teilchen/mol} = 5.02 \cdot 10^{25}\,\text{Teilchen}\,.$$

Da der ^{14}C-Anteil 10^{-12} beträgt, enthält 1kg Kohlenstoff $10^{-12} \times 5.02 \cdot 10^{25} = 5.02 \cdot 10^{13}$ radioaktive ^{14}C-Kerne. Da die Masse eines ^{14}C-Kernes höher ist als die eines ^{12}C-Kernes, soll das bei der Berechnung des Masseanteils berücksichtigt werden: Ein Kilogramm Kohlenstoff enthält $14/12 \times 10^{-12} \times 1\text{kg} = 1.2 \cdot 10^{-12}\text{kg} = 1.2 \cdot 10^{-9}\text{g} = 1.2 \cdot 10^{-6}\text{mg} = 1.2 \cdot 10^{-3}\mu\text{g} = 1.2\text{ng}$.

(b) Mit 16% von 80kg enthält der Mensch etwa 16kg Kohlenstoff und mit dem Ergebnis aus (a) also $N_0 = 16 \times 5.02 \cdot 10^{13} = 8.03 \cdot 10^{14}$ an ^{14}C-Atomkernen. Diese zerfallen nach dem Zerfallsgesetz

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau},\ \tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2}$$

Die Halbwertszeit beträgt $T_{1/2} = 5730\text{a} = 5730 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60\text{s}s = 5730 \times 31.54 \cdot 10^6\text{s} = 0.1807 \cdot 10^{12}\text{s}$. Die mittlere Lebensdauer beträgt daher $\tau = T_{1/2}/\ln 2 = 0.2607 \cdot 10^{12}$ s.
Die zeitliche Entwicklung der radioaktiven Kerne ergibt sich durch die Ableitung des Zerfallsgesetzes nach der Zeit,

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau} N_0 e^{-t/\tau}.$$

Dass dies negativ ist, bedeutet eine *Abnahme* in der Zahl von ^{14}C-Kernen, und diese Abnahme entspricht der positiven Zahl von Zerfällen pro Zeiteinheit, die man als Aktivität $A(t)$ der Probe misst und die ebenfalls exponentiell abfällt:

$$A(t) = A_0 e^{-t/\tau} = \frac{1}{\tau} N_0 e^{-t/\tau} = \lambda N_0 e^{-\lambda t}\,,$$

λ ist die sogenannte Zerfallskonstante:

$$\lambda = 1/\tau = 3.836 \cdot 10^{-12} s^{-1}\,,$$

pro Sekunde zerfallen also von einer Billion ^{14}C-Kernen im Durchschnitt nur etwa vier. Bei N_0 ^{14}C-Kernen im menschlichen Körper sind das $A_0 = \lambda N_0 = 3.836 \cdot 10^{-12} s^{-1} \times 8.03 \cdot 10^{14} = 3080 s^{-1}$.
Hinweis: ^{14}C trägt etwas weniger als die Hälfte der natürlichen Radioaktivität im Menschen bei, etwa den gleichen Beitrag liefert ^{40}K.

(c) Die Aktivität bei 1kg Kohlenstoff beträgt nach n Halbwertszeiten $A_0 = 38.5 s^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, die Summe der Zerfälle nach einer Messzeit Δt ist $A_0\,\Delta t$ und soll 10000 betragen. Damit ist die nötige Messzeit $\Delta t = 2^n \cdot 10000/A_0 = 2^n \cdot 260\text{s}$

Halbwertszeit	0	1	2	5	10
Aktivität [s^{-1}]	38.5	19.25	9.6	1.2	0.04
Messzeit [s]	260	520	1040	8320	266240

Nach 10 Halbwertszeiten ist die Aktivität auf 1‰ abgefallen und die notwendige Messzeit beträgt mehr als drei Tage.

(d) 10^{-15} von ursprünglich 10^{-12} bedeutet einen Abfall auf $10^{-15}/10^{-12} = 1$‰ der Ausgangskonzentration und entspricht nach (c) 10 Halbwertszeiten, 57300a. Länger zurückliegende Zeiträume können mit der Radiokarbonmethode nicht bestimmt werden.