Übungen zu Physik 1 für Ingenieure – Musterlösung Blatt 3

Es ist

$$\begin{aligned}\text{Hangabtriebskraft } F_H &= F_G \sin(\alpha) = mg\sin(\alpha)\\ \text{Normalkraft } F_N &= F_G \cos(\alpha) = mg\cos(\alpha)\\ \text{Reibungskraft } F_R &= \mu F_N = mg\mu\cos(\alpha)\end{aligned}$$

Aufgabe 1 – Reibung

(a) Damit der Quader die Ebene herunterrutschen kann, muss $F_H > F_R$ sein. Der Grenzfall tritt also bei Gleichheit der Kräfte ein.

$$\begin{aligned}F_H &= F_G\\ mg\sin\alpha = mg\mu\cos\alpha\\ \Rightarrow \mu = \tan\alpha \approx 0.15\end{aligned}$$

(b) Die Kraft, welche den Quader beschleunigt, ist die Hangabtriebskraft, reduziert durch die Reibung.

$$\begin{aligned}F_a &= F_H - F_R\\ F_a &= mg\sin\alpha - mg\mu_G\cos(\alpha) = mg(\sin\alpha - \mu_G\cos\alpha) = ma\\ \Rightarrow \frac{a}{g} &= \sin\alpha - \mu_G\cos\alpha\\ \Rightarrow a &= 0.965\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\end{aligned}$$

Haft- und Gleitreibung sind proportional zur Normalkraft, nicht zum Druck $\Rightarrow$ Reibung ist unabhängig von der Auflagefläche. Das Ergebnis ändert sich nicht.
(c) Beschleunigungsarbeit

$$\begin{aligned}W_a &= F_a\Delta x\\ &= mg(\sin\alpha - \mu_G\cos\alpha)\Delta x\\ &= 0.965\mathrm{J}\end{aligned}$$

Endgeschwindigkeit

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 &= W_a = F_a\Delta x\\ \Rightarrow v &= \sqrt{2a\Delta x} = 1.389\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\end{aligned}$$

nicht verlangt: Bestimmung der Reibungsarbeit:

$$\begin{aligned}W_R &= F_R\Delta x\\ &= mg\mu_G\cos\alpha\Delta x\\ &= 0.485\mathrm{J}\end{aligned}$$

Die gesamte Arbeit ist $W_a + W_R = 1.45\mathrm{J}$
Beim zweiten Quader wird die Potentielle Energie komplett in Bewegung umgewandelt.

$$\begin{aligned}W_P &= mgh = mg\Delta x\sin\alpha = 1.45\mathrm{J}\\ W_P &= \frac{1}{2}mv^2\\ \Rightarrow v &= \sqrt{2g\Delta x\sin\alpha} = 1.7\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\end{aligned}$$

Aufgabe 2 – Schiefe Ebene

$$\begin{aligned} F &= ma = mg\mu \\ \Rightarrow \mu &= \frac{a}{g} = \frac{5\mathrm{m/s}^2}{9.81\mathrm{m/s}^2} = 0.51 \end{aligned}$$

Beim Bergauf fahren wird der Bremsvorgang durch die Hangabtriebskraft unterstützt (+), beim bergab fahren vermindert sie die Bremsfähigkeit (-).

$$F_R = \mu mg\cos\alpha \pm mg\sin\alpha = ma$$

$\Rightarrow$ Bremsbeschleunigung bei einem Winkel von $\arctan(0.1) = 5.71°$

$$\begin{aligned} a_\pm &= g(\underbrace{\mu\cos\alpha \pm \sin\alpha}_{\mu_\pm}) \\ a_+ &= 0.607g = 6.0\mathrm{m/s}^2 \\ a_- &= 0.408g = 4.0\mathrm{m/s}^2 \end{aligned}$$

(b) Die Kinetische Energie wird durch die Bremsarbeit abgebaut.

$$\begin{aligned} W_R = Fs = mas = E_{\mathrm{kin}} &= \frac{1}{2}mv^2 \\ \Rightarrow s &= \frac{v^2}{2a} \\ s_+ = \frac{v^2}{2a_+} = \frac{v^2}{2a}\frac{\mu}{\mu_+} &= 0.84s \\ s_- = \frac{v^2}{2a_-} = \frac{v^2}{2a}\frac{\mu}{\mu_-} &= 1.25s \end{aligned}$$

Bitte beachten, das s hier für die Strecke steht und nicht für die Sekunde s.
Bremszeit eben: $\hat{t} = v_0/a$
Bergab:

$$\begin{aligned} s = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{a}{2}\hat{t}^2 &= v_0t - \frac{a_-}{2}t^2 = v_0t - \frac{a}{2}\frac{\mu_-}{\mu}t^2 \\ \Rightarrow 0 &= \frac{0.408}{0.51}t^2 - 2\hat{t}t + \hat{t}^2 \\ \Rightarrow t &= 0.691\hat{t} \\ \Rightarrow v = v_0 - \frac{0.408}{0.51}0.691v_0 & \\ &= 0.45v_0 \\ &= 22\mathrm{km/h} \end{aligned}$$

(c) Die Reibungskraft erhält den Vorfaktor $1 - \cos\alpha = 0.5\%$,
die Hangabtriebskraft $\sin\alpha = 10\%$.
Die Hangabtriebskraft dominiert also.
(d) 20% Gefälle entspricht einem Winkel von $\arctan(0.2) = 11.31°$.

$$\begin{aligned} a_- &= g(\mu\cos 11.31° - \sin 11.31°) \\ &= 0.304g = 3.0\mathrm{m/s}^2 \\ s_- &= \frac{v_0^2}{2a_-} = \frac{v_0^2}{2a}\frac{0.51}{0.304} \\ &= 1.68s \end{aligned}$$

Den Bremsweg für 20% erhöhte Geschwindigkeit lässt sich in der Lösung von Aufgabe 2 nach schauen.

$$s(60\text{km/h}) = (1.2)^2 s(50\text{km/h}) = 1.44 s(50\text{km/h})$$

Der Bremsweg bei 20% Gefälle ist also um 68% verlängert und damit größer als 44%.

Aufgabe 3 – Sekundenpendel

(a) Die Masse hänge bei $\varphi = 0$ gerade herunter.

$$\begin{aligned} \Delta h &= l - l\cos\varphi \\ \Rightarrow E_{\text{pot}} &= mg\Delta h = mgl(1-\cos\varphi) \end{aligned}$$

Die Rückstellkraft ist die tangentiale Komponente der Gravitationskraft, etwa entsprechend der Hangabtriebskraft bei einem Winkel φ:

$$F_{\text{Rück}} = -mg\sin\varphi$$

Das Minus rührt daher, dass die Kraft in die entgegen gesetzt der Auslenkungsrichtung wirkt.
(b) Die kinetische Energie ist maximal, wenn die potentielle minimal ist, also wenn sich die Masse ganz unten ($\varphi = 0$) befindet.

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= E_{\text{pot,max}} \\ \frac{1}{2}mv^2 &= mgl(1-\cos\varphi_{\max}) \\ v &= \sqrt{2gl(1-\cos\varphi_{\max})} \end{aligned}$$

$\varphi_{\max}$ war dabei die maximale Auslenkung.
(c) $10° = \pi/18$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\pi/18)}{\pi/18} \approx 0.9949$$

Der Fehler liegt bei etwa 0.5%.
$45° = \pi/4$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\pi/4)}{\pi/4} \approx 0.9003$$

Hier beträgt der Fehler schon 10%.
Näherung anwenden:

$$\begin{aligned} F_{\text{Rück}} &\approx mg\varphi \\ ma &= ml\ddot{\varphi} \\ \Rightarrow ml\ddot{\varphi} &= -mg\varphi \\ \ddot{\varphi} &= -\frac{g}{l}\varphi \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}(t) &= -\omega^2\varphi_1\sin(\omega t) = -\frac{g}{l}\varphi_1\sin(\omega t) \\ \Rightarrow \omega &= \sqrt{g/l} \end{aligned}$$

In der Frequenz kommt die Amplitude nicht vor, ist also unabhängig von ihr.
(e) Die Kreisfrequenz ω muss in die Schwingungsfrequenz f umgerechnet werden.

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi f \\ \Rightarrow f &= \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \\ \Rightarrow l &= \frac{1}{4\pi^2}\frac{g}{f^2} \\ &= 0.25m \end{aligned}$$

Gleiche Formel benutzen, aber mit $g/6$ statt g.

$$l = \frac{1}{4\pi^2}\frac{g}{6f^2} = 0.04\text{m}$$

Die höhere Masse spielt keine Rolle.