

Skript zur Vorlesung

Physik für Ingenieure

Bauingenieurwesen

Sales Engineering and Product Management

Umwelttechnik und Ressourcenmanagement

Wintersemester 2007/2008

Prof. Dr. Andreas Meyer

Institut für Materialphysik im Weltraum
Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt Köln

und

Lehrstuhl für Materialphysik im Weltraum
Fakultät für Physik und Astronomie
Ruhr-Universität Bochum

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung, Messung von Größen	1
1.1	Messung und Messfehler	2
1.2	Zeitmessung	3
1.3	Längenmessung	4
2	Klassische Mechanik	5
2.1	Kinematik des Massepunktes	5
2.1.1	Bahnen und Koordinationssysteme	5
2.1.2	Geschwindigkeit und Beschleunigung	5
2.1.3	Superpositionsprinzip	6
2.2	Dynamik des Massepunktes	7
2.2.1	Träge und schwere Masse	7
2.2.2	Reibungskräfte	8
2.3	Arbeit, Energie, Impuls	9
2.3.1	Arbeit und Leistung	9
2.3.2	Energie	10
2.3.3	Energieerhaltung	10
2.3.4	Impuls und Impulserhaltung	10
2.4	Mechanik starrer Körper	12
2.4.1	Drehmoment	12
2.4.2	Rotationsenergie und Trägheitsmoment	12
2.4.3	Drehimpuls	13
2.4.4	Rotationsbewegung	14
2.5	Mechanik deformierbarer Körper	15
2.5.1	Spannung und Dehnung	15
2.5.2	Ruhende Flüssigkeiten und Gase	15
2.5.3	Strömung	17
2.5.4	Viskosität und Reibung	19
2.6	Schwingungen und Wellen	20
2.6.1	Erzwungene Schwingung und Resonanz	20
2.6.2	Gekoppelte Oszillatoren	20
2.6.3	Fortschreitende Wellen	20
2.6.4	Dopplereffekt	22
2.6.5	Überlagerung von Wellen	23
2.6.6	Wasserwellen	24
3	Optik	25
3.1	Eigenschaften von Lichtstrahlen	25
3.2	Reflexion und Brechung	26
3.2.1	Reflexion	26
3.2.2	Brechung	27
3.3	Optische Abbildungen	27
3.3.1	Hohlspiegel	27
3.3.2	Prisma	28
3.3.3	Linse	28
3.3.4	Menschliches Auge	29
3.4	Wellenoptik	31
3.4.1	Interferenz	31
3.4.2	Beugung	33
3.4.3	Teilchenstrahlen	34

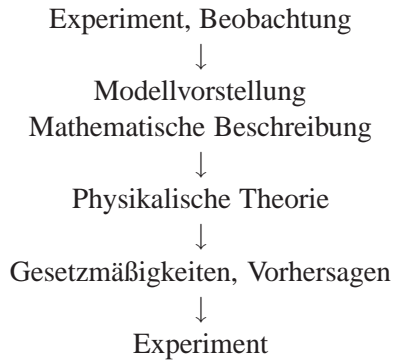
1 Einführung, Messung von Größen

Physik ist eine Wissenschaft, die sich mit der umgebenden Welt, deren Grundbausteinen und Wechselwirkungen beschäftigt.

Physik ist eine Erfahrungswissenschaft, die auf experimentell gefundenen Tatsachen beruht.

Dabei gilt: Tatsachen bleiben, Deutungen wechseln im Laufe des historischen Fortschritts.

Erkenntnisprozess:



Ziel physikalischer Forschung:

- Gesetzmäßigkeiten und Zusammenhänge in Naturphänomenen aufzeigen
- Beschreibung und Erklärung aller Naturphänomene durch wenige Grundprinzipien
- Verstehen → Abbau von Ängsten, (Weiter-) Entwicklung von Anwendungen

Experimente sind gezielte Fragen an die Natur

Geeignete experimentelle Anordnung liefert eindeutige Antworten.

Dabei muss gelten: **Wiederholbarkeit**

→ Naturgesetze müssen unabhängig sein vom Experimentator oder vom Versuchsaufbau.

Durch Experimente kann der Gültigkeitsbereich von Theorien überprüft werden. Dabei gilt: Theorien können nicht bewiesen, sondern nur widerlegt werden.

Griechische Naturphilosophie

Weltbild des Aristoteles (384-322 v. Chr.)

- Einteilung der Wissenschaft in:
Physik → körperliche, materielle Welt
Metaphysik → ideelle, geistige Welt

- Erklärung physikalischer Erscheinungen durch die Annahmen:

- Erde im Zentrum der Welt
- Vier Elemente (Feuer, Wasser, Luft, Erde) + göttliches Element (Äther)
- Bewegung: Versuch eines Stoffes, seinen natürlichen Ort im Universum zu erreichen

- Vorstellung falsch, aber:

- Entmythologisierung der Natur (z.B. Erklärung der Sonnenfinsternis)
- Funktionierende Anwendungen z.B. Archimedes (287-212 v. Chr.): Schwerpunkt, Hebelgesetz, Auftrieb

Entwicklung der klassischen Physik

Beginn der experimentellen Physik mit Galileo Galilei (1564 - 1642)

- Untermauern physikalischer Hypothesen durch gezielte Experimente (siehe Fallgesetze)
- Experiment als Prüfstein jeder Theorie

Einführung der Mathematik in die Physik durch Isaac Newton (1642-1727)

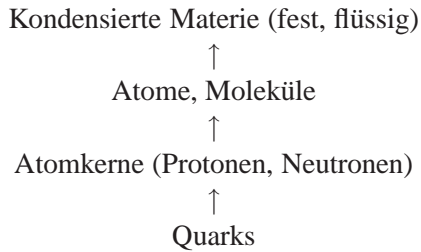
- Zusammenfassung vieler Einzelergebnisse in eine Gleichung
- Erstes verallgemeinertes Naturgesetz:
$$\vec{F} = m \vec{a}$$

Ende des 19. Jahrhunderts: Alle bekannten physikalischen Probleme scheinen gelöst. Man glaubt sich nahe an einem geschlossenen Weltbild.

Aber neue Experimente erzwingen Erweiterungen der klassischen Physik, z.B.:

- Michelson Experiment (1881):
Lichtgeschwindigkeit c ist eine Konstante und unabhängig von Bewegung des Messgerätes.
→ Spezielle Relativitätstheorie (1905 Einstein)
- Entwicklung der Spektralanalyse (Kirchoff 1824-1887, Bunsen 1811-1899):
Emission/Absorption charakteristischer Wellenlängen von Atomen
→ Ansätze der Quantentheorie (um 1900) durch Max Planck (1858-1947)

Heutiges physikalisches Weltbild:



Vier fundamentale Wechselwirkungen:

Starke WW	(Gluonen)
Schwache WW	(W-, Z- Boson)
Elektromagnetische WW	(Photonen)
Gravitations WW	(Gravitonen)

Als gute Näherung gilt:

groß, langsam → klassische Mechanik

klein → Quantenmechanik

schnell → Relativitätstheorie

1.1 Messung und Messfehler

Messung:

Quantitative Bestimmung einer physikalischen Größe durch Vergleich mit Normgrößen (Standards)

Beispiel: Waage (Urkilogramm als Normgröße)

Urkilogramm: Metallzylinder mit 139 mm Höhe und 39 mm Durchmesser aus einer Platin-Iridium Legierung. Festlegung (1889): 1 kg entspricht der Masse des Urkilogramms

Eine gemessene Größe setzt sich zusammen aus:

Zahlenwert, Messfehler und Maßeinheit

a) Messfehler:

- Systematische Fehler: Z.B. Fehler im Versuchsaufbau, fehlerhafte Eichung des Messgerätes, Nichtberücksichtigung von äußeren Einflüssen
- Statistische Fehler: Z.B. schwankende Versuchsbedingungen, Ablesegenauigkeit

Im Gegensatz zu systematischen Fehlern steigt die Genauigkeit einer Messung mit der Anzahl der Wiederholungen N . Der **Arithmetischer Mittelwert** \bar{x} der Messgröße x ist:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Das Maß für die Genauigkeit einer Messung ist die **Standardabweichung** $\sigma(x)$:

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

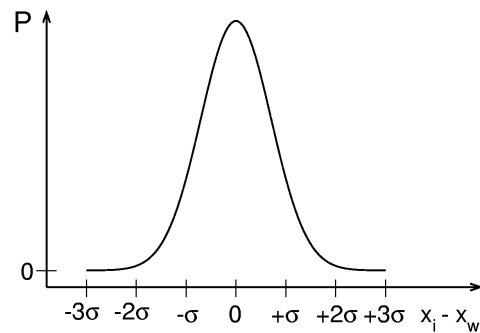
$\sigma(x)$ ist der mittlere Fehler der Größe x_i der Einzelmessung.

Der mittlere Fehler des Mittelwertes \bar{x} ist:

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

Bei statistischen Fehlern ergeben die Einzelmessungen bei $N \gg 1$ eine Gauß-Verteilung $P(x_i)$ um den **wahren Wert** x_w , d.h. in diesem Fall $x_w = \bar{x}$:

$$P(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(x)}} \exp\left[-\frac{(x_i - x_w)^2}{2\sigma^2(x)}\right]$$



Dabei liegen $\sim 68\%$ aller Messwerte x_i im Bereich von $\pm \sigma(x)$ und $\sim 95\%$ innerhalb von $\pm 2\sigma(x)$

Hängt eine Größe von anderen Größen $x, y, z \dots$ ab, die statistisch unabhängig gemessen werden, dann gilt das **Gauß'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz**:

$$\sigma(G) = \sqrt{\sigma^2(x) \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \sigma^2(y) \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 + \dots}$$

Beispiel: Geschwindigkeit: $v = l/t$:

$$\sigma(v) = \sqrt{\sigma^2(l) \left(\frac{\partial v}{\partial l}\right)^2 + \sigma^2(t) \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2}$$

$$\sigma(v) = \sqrt{\sigma^2(l) \frac{1}{t^2} + \sigma^2(t) \left(\frac{-l}{t^2}\right)^2}$$

In der Regel gibt man das Ergebnis einer Messung mit dem **Vertrauensbereich von $\pm \sigma$** an:

$$x_w = \bar{x} \pm \sigma(\bar{x})$$

b) Maßeinheiten

Zurückführung physikalischer Maßeinheiten auf wenige **Basiseinheiten** mit genauen **Messvorschriften**

→ **SI Maßsystem** (Système International d'Unités)

Alle anderen Einheiten wie Kraft [$\text{kg m s}^{-2} \equiv \text{N}$] (Newton) oder Energie [$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \equiv \text{J}$] (Joule) können aus den Basisgrößen abgeleitet werden.

Größe	SI Einheit	Symbol
Zeit	Sekunde	s
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Temperatur	Kelvin	K
Stoffmenge	Mol	mol
elektr. Stromstärke	Ampere	A
Lichtstärke	Candela	cd

Dabei können Candela und Ampere über Sekunde, Meter und Kilogramm, das Mol über Kilogramm und der Meter über Sekunde ausgedrückt werden. Nur Kilogramm, Sekunde und Kelvin sind unabhängig von anderen Basiseinheiten definiert.

In der Praxis finden noch andere Einheitssysteme Verwendung:

1 J = $6.2419 \cdot 10^{18}$ eV	(Atom/Festkörperphysik)
1 J = $2.3884 \cdot 10^{-4}$ kcal	(Chemie)
1 J = $2.7778 \cdot 10^{-7}$ kWh	(Elektrotechnik)
1 J = 10^7 erg	(Theorie: cgs System)

c) Größenordnungen

Basiseinheiten können extrem variieren, z.B. für atomare oder kosmologische Effekte ⇒ **SI Vorsätze**

Faktor	Vorsilbe	Kurzzeichen
10^{-1}	Dezi-	d
10^{-2}	Zenti-	c
10^{-3}	Milli-	m
10^{-6}	Mikro-	μ
10^{-9}	Nano-	n
10^{-12}	Piko-	p
10^{-15}	Femto-	f
10^{-18}	Atto-	a
10^1	Deka-	da
10^2	Hekto-	h
10^3	Kilo-	k
10^6	Mega-	M
10^9	Giga-	G
10^{12}	Tera-	T
10^{15}	Peta-	P
10^{18}	Exa-	E

1.2 Zeitmessung

Zeitmessung erfolgt über periodische Vorgänge, deren Periode T möglichst konstant ist. Zeit ist dann die Zahl der Perioden zwischen zwei Ereignissen mal der Periode T .

Astronomische Vorgänge (Jahr, Monat, Tag):

Ab 1960: Definition der Sekunde durch Umlauf der Erde um die Sonne. Genauigkeit: $1 \text{ s} \pm 10^{-9} \text{ s}$ (1 ns)

Höhere Genauigkeit durch Anbindung an **periodische Vorgänge von Atomen**

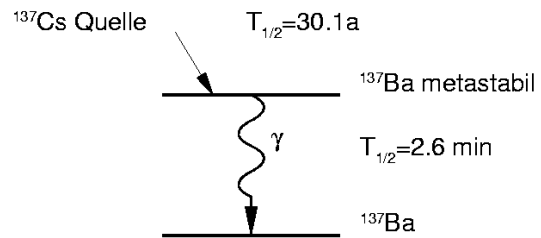
Heute: Definition der Sekunde über Hyperfeinaufspaltung im Cäsium Isotop ^{133}Cs :

$1 \text{ s} \equiv 9192631770$ Schwingungen des Cs Überganges

Erreichte Genauigkeit: $1 \text{ s} \pm 10^{-15} \text{ s}$ (1 fs)

Radioaktiver Zerfall: Messung von Zeitspannen von 10^{-9} s bis 10^9 a :

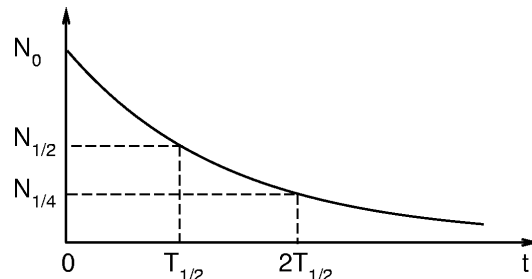
Versuch: Radioaktiver Zerfall als Zeitmesser



Zerfallsprodukt ^{137}Ba aus ^{137}Cs Quelle mit Salzsäure auswaschen. Messung der Aktivität durch Messung der Anzahl der ausgesandten γ -Quanten (Energie: 0.661 MeV) mittels eines Geiger-Müller-Zählrohres in 30 s Intervallen.

Anfangsaktivität N_0 im Versuch ca. 10^5 Bq (Becquerel: Zerfälle pro Sekunde)

Gefundene Gesetzmäßigkeit für die Aktivität $N(t)$ als Funktion der Zeit:



Nach beliebiger Zeit t , die $t/T_{1/2}$ Halbwertszeiten überstreicht gilt:

$$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}} = N_0 \exp\left(-\ln 2 \frac{t}{T_{1/2}}\right)$$

Mit der mittleren Lebensdauer: $\tau \equiv \frac{T_{1/2}}{\ln 2}$

\Rightarrow **Zerfallsgesetz:** $N(t) = N_0 \exp(-t/\tau)$

Zahl der Kerne dN , die im Zeitintervall zwischen t und dt zerfallen:

$$dN = N(t + dt) - N(t) = \frac{dN}{dt} dt$$

mit $\frac{dN}{dt} = -\frac{1}{\tau} N_0 \exp(-t/\tau)$

$\Rightarrow dN = -\frac{1}{\tau} N(t) dt$

Zahl der Kerne, die pro Zeiteinheit zerfällt ist proportional zur Zahl der vorhandenen radioaktiven Kerne.

Anwendung: Z.B. Archäologische Altersbestimmung mit der ^{14}C Methode:

^{14}C bildet sich kontinuierlich in den oberen Schichten der Atmosphäre durch Neutronenbestrahlung.

Dadurch: Zeitlich konstante Menge an ^{14}C im CO_2 der Luft $\rightarrow N_0$

Beim Absterben von Lebewesen, kein weiterer Austausch mit der Luft, ^{14}C - Gehalt nimmt durch radioaktiven Zerfall mit Halbwertszeit $T_{1/2} = 5770$ a ab.

\Rightarrow Altersbestimmung kohlenstoffhaltiger Lebewesen im Bereich von 500 a bis ~ 50000 a

1.3 Längenmessung

Historische Längeneinheiten:

Körpermaße (z.B. USA 1 inch = 1/12 foot = 2.54 cm)

1875 Definition des Meters:

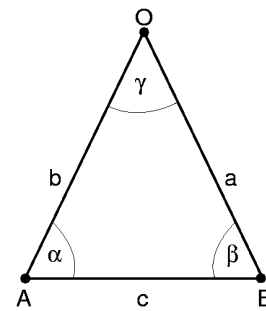
1 m $\equiv 10^{-7}$ mal Strecke Nordpol-Äquator über Paris
Urmeter in Paris: Pt-Jr-Stab bei 0°C , markiert durch Ritzen \rightarrow Genauigkeit 1 m $\pm 10^{-6}$ m (1 μm).

Ab 1983: Definition des Meters durch die Strecke, die von Licht im Vakuum in $1/299792458$ s durchlaufen wird. Lichtgeschwindigkeit: $c = 2.99792458 \cdot 10^8$ m/s
Erreichte Genauigkeit: 10^{-10} m

Methoden zur Längenmessung:

Triangulation (z.B. Höhenmessung Berggipfel)

Betrachtung eines Objektes O von zwei Standorten A und B mit bekanntem Abstand c



Mit $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ und über

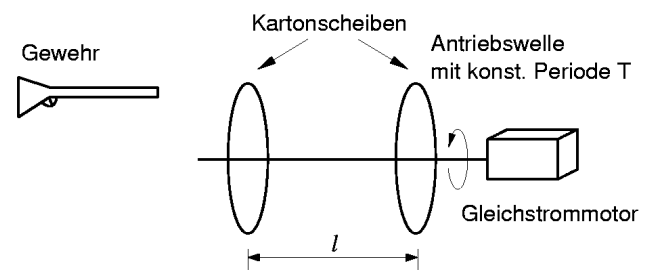
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad (\text{Sinussatz})$$

indirekte Bestimmung der Längen a und b über die Messung der Winkel

Weiteres Beispiel für indirekte Messung:

Versuch: Geschwindigkeitsmessung einer Geschwindigkeit (Pohl'sches Rad)

Versuchsaufbau:



Aus der Messung des Winkels α zwischen den beiden Durchschusslöchern kann die Flugzeit Δt der Kugel zwischen den beiden Scheiben berechnet werden:

$$\Delta t = \frac{\alpha [^\circ]}{360^\circ} T$$

\Rightarrow Geschwindigkeit der Geschwindigkeit: $v = l/\Delta t$

Anwendung:

Geschwindigkeitsselektoren für Teilchenstrahlen (z.B. Neutronenflugzeitspektrometer an der Forschungsneutronenquelle FRM-II)

2 Klassische Mechanik

Beschreibung der Bewegung punktförmiger oder ausgedehnter Körper unter dem Einfluss von Kräften

Zunehmende Komplexität:

- Kinematik von Massepunkten als Funktion der Zeit (Wie bewegt sich ein MP?)
- Dynamik des MP (Warum bewegt sich ein MP so wie er sich bewegt? → Kräfte)
- Teilchensysteme
- Starre ausgedehnte Körper
- Deformierbare Körper

2.1 Kinematik des Massepunktes

Ein Körper der Masse m lässt sich modellhaft durch einen Massepunkt beschreiben, wenn seine räumliche Ausdehnung für die Beschreibung seiner Bewegung keine Rolle spielt.

2.1.1 Bahnen und Koordinationssysteme

Beschreibung der Bewegung eines Massepunktes zur Zeit t mit Hilfe des Ortsvektors \vec{r} .

Die Funktion $\vec{r}(t)$ ist die Bahnkurve des Massepunktes, die er im Laufe der Zeit durchläuft.

Im **kartesischen Koordinatensystem** ist

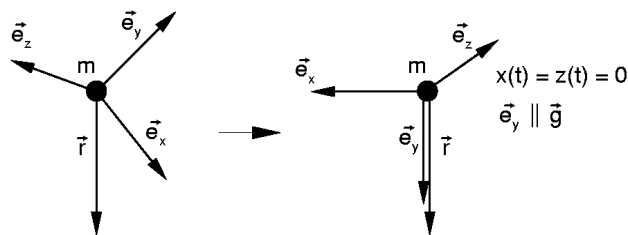
$$\vec{r}(t) = x(t) \vec{e}_x + y(t) \vec{e}_y + z(t) \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_x \perp \vec{e}_y \perp \vec{e}_z \rightarrow \text{Einheitsvektoren mit } |\vec{e}_i| = 1$$

(Rechte-Hand-Regel)

Sinnvolle Wahl des Ursprungs 0 und der Richtungen (\vec{e}_x oder \vec{e}_y oder \vec{e}_z) → Verringerung der Dimensionalität der Bahnkurve $\vec{r}(t)$.

Z.B. freier Fall:



$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \text{ 3dim} \rightarrow \vec{r}(t) = y(t) \vec{e}_y \text{ 1dim}$$

Als Bewegung bezeichnet man die Änderung des Ortes mit der Zeit, beurteilt von einem ortsfesten, starren Körper, dem **Bezugssystem** aus. Z.B. Fußboden des Hörsaals (Vernachlässigung der Erdrotation)

Verschiebung oder Rotation des Koordinatensystems bzw. eine Änderung des Bezugssystems darf nicht dazu führen, dass die Bahnkurve anderen physikalischen Gesetzmäßigkeiten folgt.

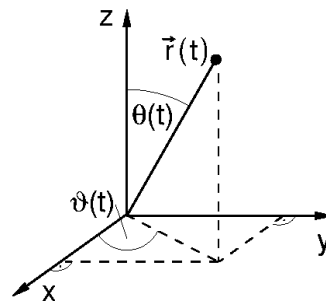
Je nach geometrischen Eigenschaften der Bahnkurve ist die Wahl anderer Koordinatensysteme sinnvoll:

Z.B. **Kugelkoordinaten** (Bewegung auf einer Kugeloberfläche mit $r(t) = \text{konst.}$ oder auf einer Kreisbahn mit $r(t) = \text{konst.}$ und $\theta(t) = \pi$)

$$x(t) \rightarrow r(t) \sin(\theta(t)) \cos(\vartheta(t))$$

$$y(t) \rightarrow r(t) \sin(\theta(t)) \sin(\vartheta(t))$$

$$z(t) \rightarrow r(t) \cos(\theta(t))$$



oder **Zylinderkoordinaten** (z.B. Rollbewegung eines Stabes, $r(t) = \text{konst.}$)

$$x(t) \rightarrow r(t) \cos(\vartheta(t))$$

$$y(t) \rightarrow r(t) \sin(\vartheta(t))$$

$$z(t) \rightarrow z(t)$$

2.1.2 Geschwindigkeit und Beschleunigung

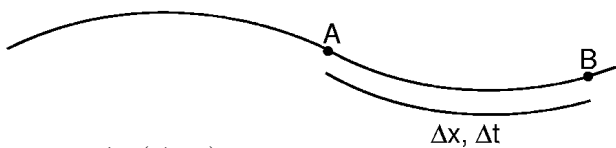
Aus der Kenntnis der Bahnkurve $\vec{r}(t)$ folgen durch Differenzbildung oder Ableitung zusätzliche kinematische Größen.

a) Mittlere Geschwindigkeit

Änderung der Position eines Massepunktes im Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$ mit $t_2 > t_1$:

$$\langle \vec{v}_{t_1, t_2} \rangle = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (\langle \rangle \equiv \text{Mittelwert})$$

Beispiel: Eindimensionale Bewegung $\vec{r}(t) \rightarrow x(t)$ für geradlinige oder geführte Bewegungen



$$\langle v \rangle = \frac{\Delta x(A, B)}{\Delta t(A, B)}$$

b) Momentane Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} \langle \vec{v}_{t, t_1} \rangle = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}$$

– Die momentane Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ zur Zeit t ist gegeben durch die Ableitung des Ortsvektors $\vec{r}(t)$ nach der Zeit.

$$- \vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$$

– Die Geschwindigkeit ist die Steigung der Kurve in einem Weg–Zeit–Diagramm.

– Dimension von v [m/s]

c) Mittlere Beschleunigung

$$\langle \vec{a}_{t_1, t_2} \rangle = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$\langle \vec{a}_{t_1, t_2} \rangle = \frac{\text{Geschwindigkeitsänderung}}{\text{Zeitintervall}}$$

d) Momentane Beschleunigung

$$\vec{a}(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} \langle \vec{a}_{t, t_1} \rangle = \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}}$$

Dimension von a [m/s²]

Versuch: Bewegung mit konstanter Beschleunigung

Ein Gleiter auf einer Luftkissenbahn gleitet reibungsfrei eine schiefe Ebene hinunter. Messung der Zeit und der Geschwindigkeit zwischen mehreren Lichtschranken als Funktion des Abstandes x vom Startpunkt x_0 . Beobachtung: $x \propto t^2$ und $v \propto t$

Konstante Beschleunigung führt zu einer Geschwindigkeitsänderung, die proportional zur Zeit t ist. Für die Geschwindigkeit zur Zeit t ergibt sich:

$$v(t) = v_0 + a t$$

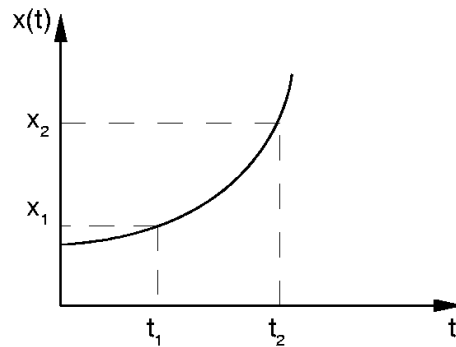
Damit ergibt sich für die zurückgelegte Wegstrecke zur Zeit t :

$$x(t) = \int dt v(t) = \int dt (v_0 + a t)$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$$

Die Integrationskonstanten v_0 und x_0 ergeben sich aus den Anfangsbedingungen.

Weg – Zeit – Diagramm



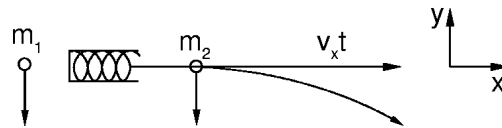
2.1.3 Superpositionsprinzip

Für kinematische Vektoren (Ortsvektor \vec{r} , Geschwindigkeit \vec{v} , und Beschleunigung \vec{a}) gilt die Vektoraddition: D.h. die Bewegung in der einen Richtung hat keinen Einfluss auf die Bewegung in den dazu senkrechten Richtungen.

– Das Superpositionsprinzip ist unabhängig von Größe und Richtung der Einzelvektoren und unabhängig von der Reihenfolge der Addition.

– Das Superpositionsprinzip ist ein experimenteller Befund.

Fallversuch nach Galilei (Versuch # 1030)



Eine Fallmaschine schleudert eine Kugel horizontal mit $v_x = v_0$ weg und lässt gleichzeitig eine zweite fallen.

Beobachtung: Beide Kugeln erreichen den Fußboden zur gleichen Zeit.

Ortsvektor von Massepunkt m_1 :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ -\frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$$

Ortsvektor von Massepunkt m_2 :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 t \\ -\frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$$

mit Erdbeschleunigung $g \simeq 9.81$ [m / s²]

2.2 Dynamik des Massepunktes

Kräfte als Ursache für Bewegungsänderungen

Aufbauend auf den Experimenten von G. Galilei und durch die Entwicklung der Differentialrechnung konnte Newton um 1687 erstmals ein allgemeingültiges Naturgesetz formulieren.

Seine drei Axiome:

- 1) Jeder Körper behält seinen Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung bei, solange keine äußeren Kräfte auf ihn wirken:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = 0 \quad \text{für} \quad \vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0$$

(**Trägheitsprinzip**)

Versuch: Gedeckter Tisch

Beobachtung: Tischtuch wird unter einem Gedeck weggezogen. Ist die Reibungskraft zwischen Tuch und Gedeck vernachlässigbar bleibt das Gedeck stehen.

Die Masse ist träge, sie möchte ihren Bewegungszustand nicht ändern.

- 2) Die Beschleunigung eines Körpers ist indirekt proportional zu seiner Masse und direkt proportional zur äußeren Kraft:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \text{oder} \quad \vec{F} = m\vec{a} \quad \text{oder} \quad \vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$$

(**Grundgleichung der Mechanik**)

- 3) Kräfte zwischen Körpern treten immer paarweise auf:

Übt Körper A auf B die Kraft \vec{F}_{AB} aus, so wirkt B auf A mit $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

(**actio = reactio**)

Kraft erzeugt Gegenkraft (*Versuch*)

Beobachtung: Wenn eine Person auf einem Wagen eine zweite Person auf einem zweiten Wagen zu sich zieht, bewegen sich beide Wagen aufeinander zu.

- 1) ist der Sonderfall von 2) mit $\vec{F} = 0$
- 2) definiert einen linearen Zusammenhang zwischen der Ursache \vec{F} und ihrer Wirkung \vec{a}
- Der Proportionalitätsfaktor m wird als **träge Masse** m_t bezeichnet.
- Dimension der Kraft: $\left[\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \equiv \text{N} \right]$ (Newton)

2.2.1 Träge und schwere Masse

- Die träge Masse m_t ist definiert durch das 2. Newton'sche Axiom:

$$m_t = F/a$$

Trägheit gegenüber Geschwindigkeitänderung

- Die schwere Masse ist definiert durch die Gravitationskraft F_G zwischen zwei Massen. Z.B. auf der Erdoberfläche:

$$m_s = F_G/g$$

Beispiel: Auf dem Mond hat eine Eisenkugel etwa $1/6 F_G$ im Vergleich zur Erde. Um eine Kugel horizontal mit v_0 zu werfen ist jedoch auf Mond und Erde die gleiche Kraft aufzubringen.

Äquivalenz von m_t und m_s ?

Anwendung des 2. Newton'schen Axioms auf den freien Fall:

$$m_t \vec{a} = \vec{F} = m_s \vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \frac{m_s}{m_t} \vec{g}$$

Beispiel: Freier Fall

Versuch mit Kugeln gleichem Durchmesser aber unterschiedlichen Massen (Eisenkugel und Schaumstoffkugel):

Beobachtung: Schaumstoffkugel fällt deutlich langsamer als Eisenkugel aufgrund der Luftreibung (systematischer Fehler).

Fallrohr evakuieren: Beobachtung: Fallzeit t unabhängig von Masse und Form der Körper, $h = g t^2$ für Kugel und Feder

Wie genau gilt $m_s = m_t$? Newton konnte mit einem Fadenpendel zeigen, dass m_s/m_t auf 10^{-3} konstant ist.

Beispiel: Mathematisches Pendel

Ein Massepunkt m ist an einem masselosen Faden der Länge l aufgehängt, der m auf eine Kreisbahn $x(t)$ zwingt.

Auf m wirkt die Gewichtskraft \vec{F}_G . Diese setzt sich zusammen aus den Teilkräften:

Radialkraft \vec{F}_{rad} und Tangentialkraft \vec{F}_{tang}

$\vec{F}_{rad}, \vec{F}_{tang}$: Reaktionskräfte auf Gewichtskraft \vec{F}_G

\vec{F}_{rad} ist senkrecht zur Bewegungsrichtung und hat daher keinen Einfluss auf die Bewegung von m .

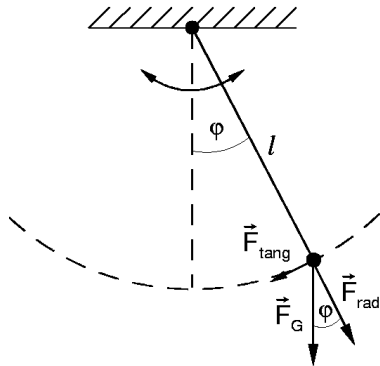
$$\Rightarrow m_t a = m_t \ddot{x} ; m_t \ddot{x} = m_t l \ddot{\varphi} \quad (x = l \varphi)$$

Tangentialkraft: $F_{tang} = -m_s g \sin \varphi$

Für kleine Auslenkungen gilt: $\sin \varphi \approx \varphi$

$\Rightarrow m_t l \ddot{\varphi} = -m_s g \varphi$

Bewegungsgleichung: $\ddot{\varphi} = -\frac{m_s}{m_t} \frac{g}{l} \varphi$



Lösungsansatz für die Differentialgleichung:

$\varphi(t) = \varphi_1 \sin(\omega t + \varphi_0)$

mit maximaler Auslenkung φ_1 und Phase φ_0

Mit Anfangsbedingung: $\varphi(t=0) = \varphi_1$

$\Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

$\dot{\varphi}(t) = \varphi_1 \omega \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (\dot{\varphi}(t=0) = 0)$

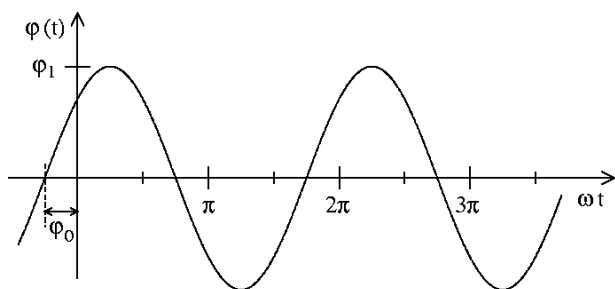
$\ddot{\varphi}(t) = -\omega^2 \varphi_1 \sin(\omega t + \varphi_0)$
 $= -\frac{m_s}{m_t} \frac{g}{l} \varphi_1 \sin(\omega t + \varphi_0) \quad \text{aus Bwgl.}$

\Rightarrow Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{m_s}{m_t} \frac{g}{l}}$

$\Rightarrow \varphi(t)$ ist periodisch in ωt mit der Periode:

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m_t}{m_s} \frac{l}{g}}$

Z.B. für ein Sekundenpendel: $l = 0.2484 \text{ m}$



Für $m_t = m_s$ hängt Bewegung eines Fadenpendels nicht von der Masse ab (*Versuch*).

Vergleich der Perioden T für Pendelschwingungen unterschiedlicher Massen bei konstantem l :

\Rightarrow Konstanz von m_s/m_t auf 10^{-12} Genauigkeit

2.2.2 Reibungskräfte

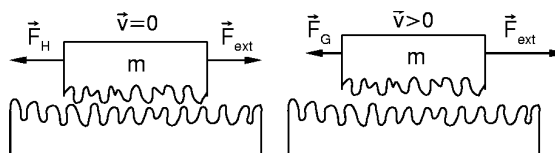
Reibungskräfte verursachen Bewegungsänderungen. Reibung führt u.a. dazu, dass:

- Bewegungen langsamer werden
- Schwingungen gedämpft werden

Reibung zwischen Körpern entsteht in ihrer Berührungsfläche. Ursachen:

- Mikroskopische Struktur der beiden Oberflächen (Rauigkeit)
- Wechselwirkung zwischen den Atomen/Molekülen der beiden Oberflächen

Man unterscheidet zwischen Haftreibung und Gleitreibung:



Da sich durch die Bewegung der mittlere Abstand zwischen Körper und Unterlage im zeitlichen Mittel leicht vergrößert, ist die Haftreibungszahl μ_H in der Regel größer als die Gleitreibungszahl μ_G (*Versuch*).

Wird ein Körper mit der Normalkraft \vec{F}_N auf eine Unterlage gedrückt, so muss eine äußere Kraft \vec{F}_{ext} tangential zur Unterlage aufgebracht werden, um den Körper zu verschieben, die größer ist als die **Haftreibungskraft** \vec{F}_H :

$|\vec{F}_H| = \mu_H |\vec{F}_N|$

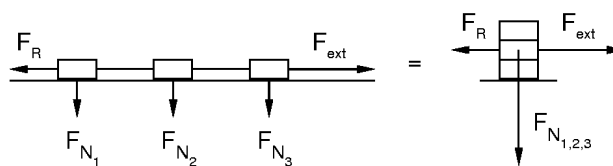
Für die **Gleitreibungskraft** \vec{F}_G gilt analog:

$|\vec{F}_G| = \mu_G |\vec{F}_N|$

Die Reibungszahlen hängen von Materialart und Oberflächenbeschaffenheit ab (*Versuch*).

Dabei nimmt μ_G mit zunehmender Geschwindigkeit ab (Vgl. Bewegung von Körpern in Flüssigkeiten und Gasen).

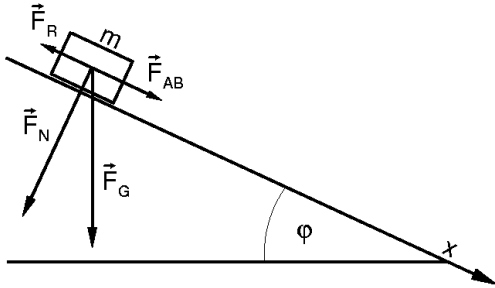
Die Reibungszahlen hängen nicht von der Größe der Oberfläche ab. D.h., dass die Reibungskraft direkt proportional zur Normalkraft F_N ist (*Versuch*).



- Reibung erzeugt Wärme (irreversibel) \Rightarrow Reibungskräfte sind **dissipative Kräfte**.
- Verringerung von Haft- und Gleitreibung durch Schmiermittel

Zahlenwerte	μ_H	μ_G
Stahl/Stahl (trocken)	0.15	0.12
Stahl/Stahl (geschmiert)	0.13	0.01
Gummi/Asphalt (trocken)	0.55	0.30
Gummi/Asphalt (nass)	0.20	0.15
Gummi/Eis	< 0.1	0.05

Beispiel: Schiefe Ebene



Gewichtskraft $|\vec{F}_G| = m g$ zerlegt in
 Normalkraft $|\vec{F}_N| = m g \cos \varphi$ und
 Abtriebskraft $|\vec{F}_{AB}| = m g \sin \varphi$
 \Rightarrow Reibungskraft $|\vec{F}_R| = \mu_{H,G} |\vec{F}_N|$ ($|\vec{F}_R| = F_R$)

- Für $F_{AB} < \mu_H F_N$: Körper bewegt sich nicht
- Für $F_{AB} = \mu_H F_N$
 $\Rightarrow m g \sin \varphi_c = \mu_H m g \cos \varphi_c$

Bestimmung der Haftreibungszahl μ_H aus Messung des kritischen Winkels φ_c :

$$\mu_H = \frac{\sin \varphi_c}{\cos \varphi_c} = \tan \varphi_c$$

- Für $F_{AB} > \mu_H F_N > \mu_G F_N$: Körper gleitet
 Bwgl. unter der Annahme, dass $\mu_G = \text{konst.}$:

$$m a = F_{AB} - F_R$$

$$m a = m g \sin \varphi - \mu_G m g \cos \varphi$$

$$\Rightarrow a = g (\sin \varphi - \mu_G \cos \varphi)$$

D.h. der Körper bewegt sich mit konstanter Beschleunigung die schiefe Ebene hinunter.

Aus Messung von a Bestimmung von μ_G

2.3 Arbeit, Energie, Impuls

Über Newton'sche Bewegungsgleichung und actio = reactio \rightarrow quantitative Behandlung aller Bewegungen (Anwendung: Molekular Dynamik Simulation)
 Komplizierte Bewegungen \rightarrow hoher Rechenaufwand \Rightarrow Einführung von Hilfsgrößen: Arbeit, Energie und Impuls.

Dabei sind Arbeit und Energie skalare Größen, die aus der Bahnkurve $\vec{r}(t)$ durch Integration folgen.

2.3.1 Arbeit und Leistung

Begriff Arbeit stammt aus der Mechanik einfacher Maschinen (Hebel, Flaschenzug).

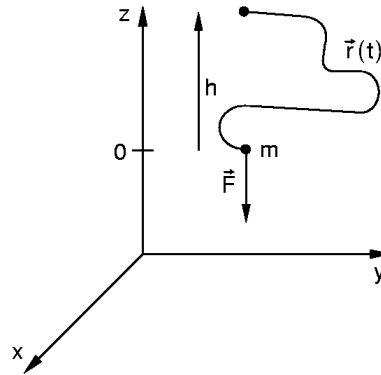
Arbeit ist das Produkt "Kraft in Richtung des Weges mal Weg":

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Dabei gilt:

- W ist positiv, wenn die Kraft eine Komponente in Wegrichtung hat. D.h. die Kraft verrichtet Arbeit.
- W ist negativ, wenn die Kraft eine Komponente entgegengesetzt der Wegrichtung hat. D.h. es wird gegen die Kraft Arbeit verrichtet.
- Dimension $[N m = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \equiv J]$ (Joule)

Beispiel: Hubarbeit im Schwerfeld der Erde



$$\vec{F} = m \vec{g} = -m g \vec{e}_z \quad \text{und} \quad dW = -m g dz$$

$$\Rightarrow W(h) = \int_0^h -m g dz = -m g h$$

D.h. die Hubarbeit $W \propto h$ ist unabhängig vom Weg.

Für Bewegung in x, y - Richtung mit $\vec{F} \parallel \vec{e}_z$ gilt:

$$(d\vec{r} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z)$$

$$\Rightarrow dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -m g \vec{e}_z \cdot (dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y) = 0$$

$$(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0)$$

Fällt der Körper aus der Höhe h auf die Erde, dann gilt: $W > 0$

$$W = \int_h^0 -m g dz = m g h$$

Leistung ist verrichtete Arbeit pro Zeitintervall:

$$P \equiv \frac{dW}{dt}$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$$

$$\Rightarrow P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{s}} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3} \equiv \text{W} \right] \quad (\text{Watt})$$

Zahlenbeispiel: Student, 70 kg, springt in 3 s eine 6 m hohe Treppe hinauf. Dabei ist seine Leistung:

$$70 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ ms}^{-2} \cdot 6\text{m}/3\text{s} \approx 1.4 \text{ kW}$$

Z. Vgl.: Großkraftwerk $> 1 \text{ GW}$, KFZ: 1 PS = 735 W

2.3.2 Energie

Energie ist die Fähigkeit eines Körpers, Arbeit zu leisten. In der klassischen Mechanik gibt es drei Formen von Energie:

- **Potenzielle Energie E_{pot}** : Nur abhängig von den relativen Positionen $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ der Körper
- **Kinetische Energie E_{kin}** : Nur abhängig von Geschwindigkeit v und Masse m der Körper
- **Wärme Q** : Mikroskopische Bewegung der Atome in einem Körper (innere Energie)

Durch verschiedene Kräfte der Mechanik kann über die entsprechende Arbeit Energie von einer Form in eine andere Form umgewandelt werden.

Versuch: Tanzende Stahlkugel

Eine Stahlkugel wird auf eine Glasplatte fallengelassen: Sie springt fast wieder in ihre Ausgangsposition zurück ($E_{pot} \rightarrow E_{kin} \rightarrow E_{pot}$).

Bleiplatte anstelle der Glasplatte: Die Stahlkugel hinterlässt einen Abdruck in der Bleiplatte und springt kaum wieder hoch ($E_{pot} \rightarrow E_{kin} \rightarrow Q$).

Definition von elastisch: Erfüllung des mechanischen Energiesatzes ($E_{pot} + E_{kin} = \text{konst.}$) bei Verformung

2.3.3 Energieerhaltung

Aus der Integration der Grundgleichung $\vec{F} = m \vec{a}$ folgt:

$$\begin{aligned} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= W_{12} = -\Delta E_{pot}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m \vec{a} \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{1}{2} m v^2(\vec{r}_2) - \frac{1}{2} m v^2(\vec{r}_1) \\ &= \Delta E_{kin}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta E_{pot} + \Delta E_{kin} = 0$$

\Rightarrow **Energie(erhaltungs)satz der Mechanik**

$$E_{pot}(\vec{r}) + E_{kin}(\vec{r}) = E = \text{konst.}$$

In der Regel wird immer ein Teil der kinetischen Energie in Wärme umgewandelt.

Damit ergibt sich der **verallgemeinerte Energiesatz:**

$$Q_{12} = \Delta E_{pot} + \Delta E_{kin} = \Delta E$$

Die von dissipativen Kräften \vec{F}_R verrichtete Arbeit Q ist gleich der Änderung ΔE der Gesamtenergie eines Körpers.

2.3.4 Impuls und Impulserhaltung

Das Wegintegral der Kraft, die Arbeit ($\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$), ist eine skalare Größe.

Das Zeitintegral der Kraft ($\int \vec{F} dt$) heißt Kraftstoß und führt zum Impuls \vec{p} (vektorielle Größe). Der Impuls eines Körpers ist definiert als das Produkt seiner Masse und seiner Geschwindigkeit:

$$\vec{p} \equiv m \vec{v} \quad \text{Dimension } [\text{kg m s}^{-1}]$$

Ein Kraftstoß $\int \vec{F} dt$ ändert den Impuls eines Körpers:

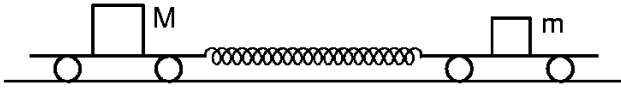
Während jedes Zeitabschnittes dt_i wirkt die Kraft $\vec{F}_i = m \vec{a}_i$ auf den Körper. Die Beschleunigung erzeugt in dt_i eine Geschwindigkeitsänderung.

$$\text{Mit } \vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

ist die auf ein Teilchen wirkende Kraft gleich der zeitlichen Änderung seines Impulses \vec{p} . Dabei gilt $ma = d(mv)/dt$ nur wenn die Masse zeitlich konstant ist.

N.B. $\dot{p} = d(mv)/dt$ gilt auch in der relativistischen Mechanik, jedoch mit Masse $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ (m_0 : Ruhemasse, c : Lichtgeschwindigkeit)

Versuch: Zwischen zwei ruhenden Wagen der Massen M und m befindet sich eine gespannte Feder:



Gibt ein Auslöser die Wagen frei, erhalten beide Wagen Kraftstöße gleicher Größe, aber entgegengesetzter Richtung (actio = reactio).

⇒ Wagen erhalten Impulse gleicher Größe, aber entgegengesetzter Richtung.

$$M \vec{v}_1 = -m \vec{v}_2; \quad M \vec{v}_1 + m \vec{v}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \sum_i \vec{p}_i = 0$$

Der Gesamtimpuls bleibt konstant ($\vec{p}_g = 0$).

Versuch: Wagen mit Laufbrett

1) Geht man vom Boden aus mit konstanter Geschwindigkeit über das Laufbrett, bleibt der Wagen stehen.

2) Geht man vom Boden aus auf das Laufbrett und bleibt auf dem Brett stehen, rollt der Wagen samt Versuchsperson.

3) Verlässt man dann den ruhenden Wagen, rollt der Wagen in entgegengesetzter Richtung davon.

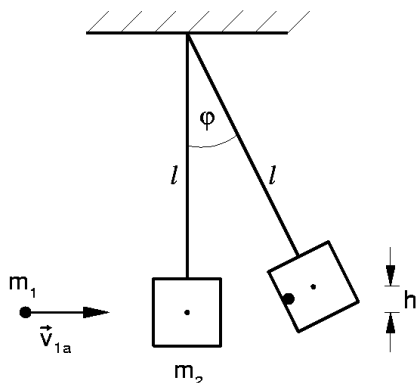
Allgemeiner Satz der Impulshaltung:

In einem abgeschlossenen System, für das gilt $\vec{F}_{ext} = 0$, bleibt der Gesamtimpuls zeitlich konstant.

$$\text{Für } \vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow m_g \ddot{\vec{R}}_s = 0 \Rightarrow m_g \dot{\vec{R}}_s = \text{konst.} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}_g \equiv m_g \dot{\vec{R}}_s = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{p}_i = \text{konst.}$$

Versuch: Ballistisches Pendel



Bestimmung der Geschwindigkeit einer Gewehrkuugel der Masse m_1 durch Messung der Auslenkung eines Holzkörpers der Masse m_2 , der an einem Fadenpendel hängt (Kugel bleibt stecken)

$$v_{1e} = v_{2e} \quad (E_{kin} = 0 \text{ im Schwerpunktsystem})$$

$$\Rightarrow m_1 v_{1a} = (m_1 + m_2) v_{2e}; \quad v_{2e} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1a}$$

$$E_{kin}^a = \frac{1}{2} m_1 v_{1a}^2$$

$$E_{kin}^e = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{2e}^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_{1a}^2$$

Energiebilanz beim Stoß:

$$Q = E_{kin}^a - E_{kin}^e = \frac{1}{2} m_1 v_{1a}^2 \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)$$

Für $m_2 \neq 0$ ist $E_{kin}^e < E_{kin}^a \rightarrow$ Umwandlung in Q

Nach dem Stoß wird im Pendel E_{kin}^e in potenzielle Energie umgewandelt.

Mit $h = l(1 - \cos \varphi)$:

$$\Rightarrow E_{pot} = (m_1 + m_2) g h = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{2e}^2$$

$$\Rightarrow v_{1a} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_{2e}; \quad v_{2e} = \sqrt{2gh}$$

$$v_{1a} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh}$$

Mit $m_1 = 0.5 \text{ g}$, $m_2 = 180 \text{ g}$, $l = 0.92 \text{ m}$ und $\alpha \approx 10^\circ$

$$\Rightarrow v_{1a} = 190 \text{ m/s} \quad (\text{vgl. Pohl'sches Rad} \rightarrow 1.3)$$

$$Q = E_{kin}^a \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) = 0.997 E_{kin}^a$$

D.h. der weitaus größte Teil der kinetischen Energie der Gewehrkuugel wird beim Stoß in Wärme umgewandelt.

Versuch: Vollständig inelastischer Stoß auf der Luftkissenbahn ($v_{2a} = 0$)

Die beiden Gleiter der Massen $m_1 = m_2$ bleiben beim Stoß aneinander kleben. Die Geschwindigkeit der Gleiter nach dem Stoß ist gerade die halbe Geschwindigkeit von Gleiter m_1 vor dem Stoß. Energiebilanz: $Q = \frac{1}{2} E_{kin}^a$.

Beispiel: Strahlantrieb – Bewegung eines Systems mit veränderlicher Masse

Versuch: Bei Antrieb einer Spielzeugrakete mit reiner Pressluft ist die Rakete langsamer als bei Antrieb mit Luft und Wasser.

Begründung: Zu Beginn in etwa gleiche Ausstoßgeschwindigkeit. Aufgrund der größeren Masse des ausgestoßenen Wassers größerer Impuls des "Treibstoffes". Wegen Gesamtimpulserhaltung größerer Impuls der Rakete. Die Rakete wird kontinuierlich durch den Rückstoß der auströmenden Treibgase beschleunigt. (*Versuch:* Raketenauto)

2.4 Mechanik starrer Körper

Bei der Betrachtung der Dynamik von Massepunkten oder Körpern unter Vernachlässigung ihrer Ausdehnung: Alle Kräfte wirken auf ihren Schwerpunkt \vec{R}_s
 \Rightarrow nur translatorische Bewegungen

Bei starren Körpern, bei denen Form und Ausdehnung unter Einwirkung externer Kräfte konstant bleiben: Externe Kräfte können außerhalb von \vec{R}_s angreifen
 \Rightarrow translatorische und rotatorische Bewegungen

2.4.1 Drehmoment

Ist die Drehachse eines starren Körpers fest gelagert, gibt es keine translatorische Bewegung unter Einwirkung äußerer Kräfte.

Es kommt zu einer Drehbewegung, wenn eine angreifende äußere Kraft \vec{F} eine zur Drehebene parallele Komponente hat und die Richtung von \vec{F} nicht durch die Drehachse \vec{A} hindurchgeht:

\Rightarrow Die Kraft \vec{F} hat ein wirksames **Drehmoment** \vec{M} zur Achse \vec{A} .

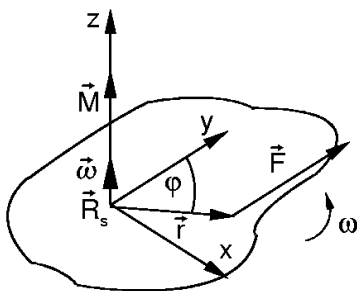
$$\vec{M} \equiv \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{Dimension [N m]}$$

M entspricht dem Produkt aus F und r_{\perp} , wobei r_{\perp} der kürzeste Abstand zur der Linie ist, entlang derer die Kraft wirkt (Hebelarm).

Ohne feste Drehachse: Rotation um den Schwerpunkt eines starren Körpers

\Rightarrow Das Drehmoment \vec{M} , das durch eine äußere Kraft erzeugt wird, die im Punkt \vec{r} im Schwerpunktsystem eines starren Körpers angreift, ist definiert als:

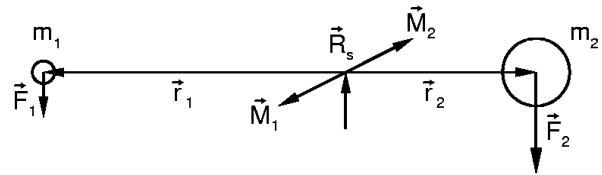
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}; \quad M = r F \sin \varphi = r_{\perp} F$$



- Für \vec{r} , \vec{F} und $\vec{M} \rightarrow$ (Rechte-Hand-Regel)
- $\vec{M} \parallel \vec{\omega}$
- Der Körper rotiert nicht, wenn im Schwerpunkt \vec{R}_s die Summe aller angreifenden Drehmomente \vec{M}_i gleich null ist.

$$\text{In } \vec{R}_s \text{ gilt: } \sum_i \vec{M}_i = 0$$

Beispiel: System von zwei Massepunkten, die durch masselose Stange starr miteinander verbunden sind.



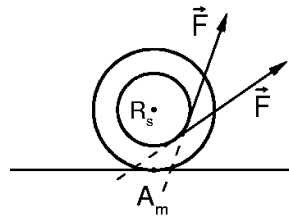
$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{g} + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{g} = 0$$

$$\Rightarrow r_1 = -r_2 \frac{m_2}{m_1} \quad (\text{Hebelgesetz})$$

Versuch: Ein Besen wird entlang seines Stieles so lange auf dem Finger verschoben, bis er sich nicht mehr dreht (in R_s). Zersägen in R_s und Wiegen der beiden Stücke zeigt: Massen sind nicht gleich.

Bei nicht - reibungsfrei rotierenden, starren Körpern, muss die relevante Drehachse nicht durch R_s gehen.

Versuch: folgsame Garnrolle



Aufgrund von Reibung ist nicht die Symmetrieachse die Drehachse, sondern die Berührungslinie A_m der Garnrolle mit dem Boden.

\Rightarrow Je nach Winkel zwischen gezogenem Faden und Boden rollt sich die Garnrolle bei Zug weiter ab oder folgt der Zugkraft (Richtung von \vec{M} !).

2.4.2 Rotationsenergie und Trägheitsmoment

Ein Drehmoment \vec{M} verrichtet bei der Drehung eines Körpers um den Winkel φ die Arbeit W :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F r_{\perp} d\varphi = M d\varphi$$

$$\Rightarrow W = \int M d\varphi = M \varphi$$

Dabei wird der Körper beschleunigt.

Die kinetische Energie eines um seine Achse rotierenden Körpers ist die Summe der kinetischen Energien aller einzelnen Teilchen m_i des Körpers:

$$\Rightarrow E_{kin,i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Dabei haben alle Teilchen m_i die gleiche Winkelgeschwindigkeit $\omega = v_i/r_i$:

$$\Rightarrow E_{kin,i} = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

Die Summe über alle Teilchen m_i ergibt die kinetische Energie E_{rot} des gesamten rotierenden Körpers:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2$$

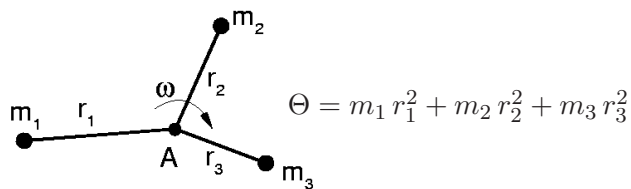
Dabei berücksichtigt das **Trägheitsmoment** Θ Form und Masse des rotierenden Körpers:

$$\Theta = \sum_i m_i r_i^2 = \int dm r^2 \quad \text{Dimension [kg m}^2\text{]}$$

\Rightarrow Für die Rotationsenergie eines rotierenden Körpers:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \Theta \omega^2$$

Beispiel 1: Trägheitsmoment von drei Massepunkten, die starr durch masselose Stangen verbunden sind:

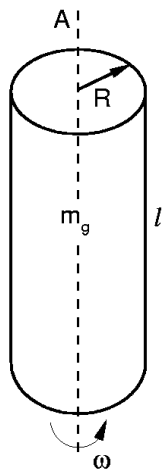


Beispiel 2: Trägheitsmoment von Voll- und Hohlwalze (*Versuch*):

Zwei Walzen mit identischen Abmessungen und Massen rollen eine schiefe Ebene hinunter. In einer Walze (Aluminium) ist die Masse im äußeren Rand konzentriert, in der anderen (Kunststoff) homogen verteilt. Beobachtung: Die Walze aus Kunststoff rollt die schiefe Ebene schneller hinunter.

Energieerhaltung: $E_{pot} = E_{kin}(\text{translatorisch}) + E_{rot}$

Trägheitsmoment Θ_z eines Zylinders mit homogener Masseverteilung:



$$\Theta_z = \int_{Zyl} r^2 dm = \rho \int_{V_Z} r^2 dV$$

Kreisfläche A_K :

$$A_K = \int_0^R \int_0^{2\pi} r d\vartheta dr = R^2 \pi$$

Zylindervolumen V_Z :

$$V_Z = A_K \int_0^l dz = l R^2 \pi$$

In Zylinderkoordinaten:

$$dV = d^3 r = r dr d\vartheta dz$$

$$\Rightarrow \Theta_z = \rho \int_0^R r^2 r dr \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^l dz$$

$$\begin{aligned} &= \rho \frac{R^4}{4} 2\pi l = \frac{m_g}{R^2 \pi l} \frac{R^4}{2} \pi l \\ &= \frac{m_g}{2} R^2 \end{aligned}$$

Für das Trägheitsmoment eines Hohlzylinders mit Radius R , in dem seine Masse m_g in einer dünnen Wand konzentriert ist:

$$\Theta_{hz} = m_g R^2$$

\Rightarrow Bei gleicher Masse und Radius hat ein Hohlzylinder ein größeres Trägheitsmoment als ein Zylinder.

Mit $m_g g h = \frac{1}{2} m_g v_s^2 + \frac{1}{2} \Theta \omega^2$ und $v_s = \omega R$ gilt:

Für den Vollzylinder:

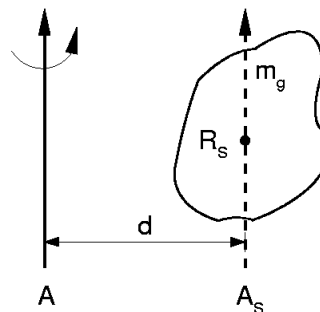
$$\omega = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{g h}{R^2}}$$

Für den Hohlzylinder:

$$\omega = \sqrt{\frac{g h}{R^2}}$$

\Rightarrow Vollzylinder rollt schneller die schiefe Ebene hinunter als der Hohlzylinder.

Bei Rotation eines Körpers der Masse m_g um eine beliebige feste Achse gilt der **Steiner'sche Satz**:



$$\Theta_A = \Theta_S + m_g d^2$$

Das Trägheitsmoment Θ_A bei Rotation um eine beliebige Achse A ist die Summe des Trägheitsmomentes Θ_S der Rotation um die zu A parallele Achse A_S durch den Schwerpunkt R_S des Körpers und des Trägheitsmomentes $m_g d^2$ für Rotation um A .

2.4.3 Drehimpuls

Analog zur Definition des Drehmoments $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ wird der Drehimpuls \vec{L} eines Massepunktes, der sich an einem Ort \vec{r} bezüglich des Ursprungs mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegt, definiert als:

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \vec{v} \quad \text{Dimension [J s]}$$

Auch für den Drehimpuls gilt ein Erhaltungssatz:

Ohne Einwirkung eines äußeren Drehmoments bleibt der Drehimpuls nach Betrag und Richtung konstant:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_{ext} = 0$$

wenn $\vec{F}_{ext} = 0$ oder $\vec{F}_{ext} \perp \vec{v}$

Versuch: Experimente mit dem Drehstuhl

1) Person mit 3 kg Hanteln in den Händen rotiert langsam mit ausgestreckten Armen. Legt sie die Hanteln an den Körper an, erhöht sich die Winkelgeschwindigkeit ω_D des Drehstuhls.

2) Drehstuhl rotiert nicht. Anstelle der Hanteln hält die Person eine Fahrradfelge in den Händen. Drehen der Fahrradfelge mit $\vec{\omega}_F || \vec{\omega}_D$ führt zu Rotation des Drehstuhls.

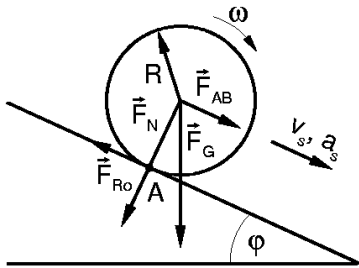
2.4.4 Rotationsbewegung

Für das Rollen eines starren Körpers mit kreisförmigem Querschnitt (ohne Rutschen) gilt:

Jeder Punkt des Körpers rotiert im Schwerpunktsystem um \vec{R}_s mit gleicher Winkelgeschwindigkeit ω .

$\Rightarrow v_s = R\omega$ (Rollbedingung)

Beispiel 1) Rollbewegung eines Zylinders der Masse m_g auf einer schiefen Ebene:



Die Gewichtskraft \vec{F}_G erzeugt, bezogen auf den Auflagepunkt A (momentane Drehachse), das Drehmoment:

$$M_A = R F_{AB} = R m_g g \sin \varphi$$

mit $M = \dot{L}$ und $L = \Theta \omega$

$$\Rightarrow \text{Winkelbeschleunigung } \dot{\omega} = \frac{M_A}{\Theta_A}$$

Trägheitsmoment $\Theta_A = \Theta_s + m_g R^2$ und $v_s = R\omega$:

$$a_s = R \dot{\omega} = R \frac{M_A}{\Theta_A} = g \sin \varphi \frac{m_g R^2}{\frac{1}{2} m_g R^2 + m_g R^2} = \frac{2}{3} g \sin \varphi$$

Ohne Reibung rutscht der Körper die schiefe Ebene hinunter ($a_s = g \sin \varphi$):

D.h. um das Drehmoment für die Rollbewegung herzustellen, muss an der Rotationsachse in \vec{R}_s eine Antriebskraft angreifen, die entgegengesetzt dem Rollwiderstand ist.

\Rightarrow Für das Drehmoment $M_A = R F_{AB} = \mu_{Ro} F_N$ mit Rollreibungskoeffizient μ_{Ro} (Dimension [m])

\Rightarrow Rollwiderstand: $F_{Ro} = M_A/R = F_{AB}$

Rollreibung entsteht durch elastische Verformung der Bahn und des rollenden Körpers am Auflagepunkt A . (In der Regel keine rein elastischen Prozesse \rightarrow Energiedissipation). D.h. im Gegensatz zu Haft- und Gleitreibung keine Verringerung der Rollreibung durch Schmiermittel.

Vergleich: Wagen und Schlitten mit gleicher Masse:

Wagen erfordert Kraft: $F_{Wa} = M/R = \mu_{Ro} F_G/R$

Schlitten: $F_{Schl} = \mu_G F_G$

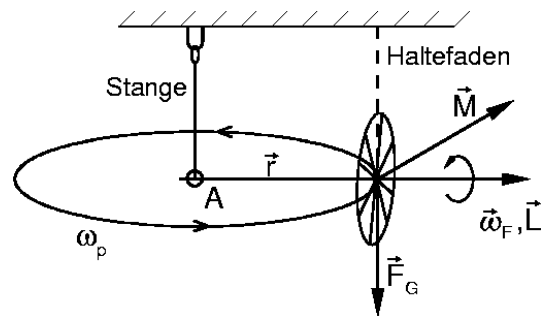
$$\frac{F_{Wa}}{F_{Schl}} = \frac{\mu_{Ro}}{\mu_G R}$$

Typische Zahlenwerte: $\mu_{Ro} = 0.001$ m, $\mu_G = 0.3$

$R = 0.5$ m $\Rightarrow F_{Wa}/F_{Schl} = 1/150$

\Rightarrow Wagen mit großen Rädern

Beispiel 2) Einseitig frei aufgehängter Kreisel

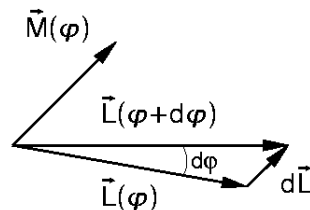


Beobachtung: Der rotierende Fahrradkreisel fällt nach Durchtrennen des Haltefadens nicht nach unten, sondern dreht sich zusätzlich horizontal um A .

Begründung: Die Fahrradfelge der Masse m rotiert mit $\vec{\omega}_F$. Durch Abschneiden des Haltefadens wirkt ein Drehmoment auf den Fahrradkreisel:

$$\vec{M} = \vec{r} \times m \vec{g}, \quad M = m g r$$

Das Drehmoment \vec{M} auf den Fahrradkreisel ändert die Richtung des Drehimpulses \vec{L} . Da $\vec{M} \perp \vec{L}$ bleibt $|\vec{L}|$ gleich.



\Rightarrow Die Änderung des Drehimpulses des Kreisels geht in Richtung des angreifenden Drehmomentes.

\Rightarrow **Präzession** des rotierenden Fahrradkreisels um A

2.5 Mechanik deformierbarer Körper

2.5.1 Spannung und Dehnung

Jeder Körper lässt sich durch Kräfte verformen. Für die elastische (reversible) Längenänderung Δl eines Festkörpers gilt:

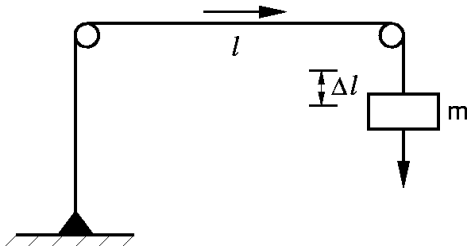
Kraft und Dehnung sind proportional: $F_{ext} = k \Delta l$

Die Dehnung ε wird definiert als Quotient aus Längenänderung Δl zur ursprünglichen Länge l :

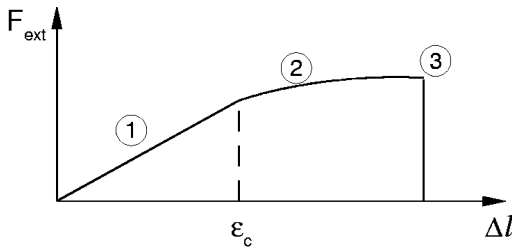
$$\varepsilon = \Delta l / l$$

Für $\varepsilon > 0$: Dehnung, für $\varepsilon < 0$: Stauchung.

Versuch: Dehnung eines 2 m langen Kupferdrahtes mit 0.22 mm Durchmesser

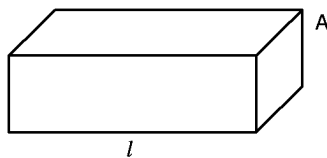


Kraft-Dehnungsdiagramm



- 1) Elastischer Bereich: Linearer Zusammenhang
- 2) Ist Δl größer als die kritische Dehnung ε_c :
Plastisches Fließen (irreversibel)
- 3) Bruch des Drahtes

Im elastischen Bereich ist die Federkonstante k invers proportional zur ursprünglichen Länge l und proportional zur Querschnittsfläche A des Festkörpers:



$$k \propto \frac{A}{l}$$

Daraus ergibt sich eine von der Geometrie des Körpers unabhängige Form des Hooke'schen Gesetzes:

$$F_{ext} = EA \frac{\Delta l}{l} \Rightarrow k = E \frac{A}{l}$$

Anwendung: Einstellen der Federkonstante für ein Bauteil über A und l :



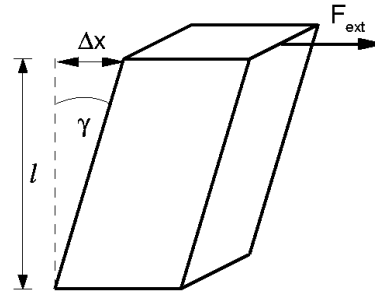
l groß, A klein
→ Kugelschreiber



l klein, A groß
→ Autofeder

Dabei ist der Elastizitätsmodul E [N/m^2] eine Materialgröße.

Greift \vec{F}_{ext} nicht senkrecht, sondern parallel zur Querschnittsfläche A an, spricht man von Scherung.



Die Scherung ist der Quotient $\Delta x / l = \tan \gamma \approx \gamma$. Für kleine Beanspruchungen (elastische Verformung) gilt:

$$\gamma = \tau / G \quad \text{mit der Scherspannung } \tau = F_{ext} / A$$

Analog zum Elastizitätsmodul E ist der **Schermodul** G (auch Schubmodul) eine Materialgröße:

	Al	Pb	Stahl	Glas	Plexiglas
E [10^9 N/m^2]	71	16	220	75	3.2
G [10^9 N/m^2]	26	5.7	85	32	1.2

2.5.2 Ruhende Flüssigkeiten und Gase

Der Unterschied zwischen festen und flüssigen Körpern liegt in ihrem Verhalten bei Änderung ihrer Form. Eine Verformung fester Körper erfordert immer externe Kräfte.

Bei Flüssigkeiten werden die erforderlichen Kräfte um so kleiner, je langsamer der Vorgang abläuft.

Versuch: Formt man aus geeigneter Knetmasse eine Kugel und wirft sie auf den Boden, springt sie wie ein Gummiball wieder hoch, d.h. für die kurze Stoßzeit verhält sich die Knetmasse wie ein fester Körper. Legt man die Kugel hingegen für einige Minuten auf den Boden, so zerläuft sie wie eine zähe Flüssigkeit.

Im Gegensatz zu festen Körpern treten in Flüssigkeiten und Gasen **keine stationären Scherkräfte** auf.

Zur Beschreibung von ruhenden Flüssigkeiten und Gasen benutzt man anstelle der Größen Kraft F und Masse m die Größen:

Druck $P = \frac{F}{A}$ Dimension $\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \equiv \text{Pa} \right]$ (Pascal)

und Dichte $\rho(\vec{r}) = \frac{dm(\vec{r})}{dV}$

(Teilchensysteme aus $\sim 10^{23}$ Teilchen).

Im Gegensatz zu Festkörpern und Flüssigkeiten nehmen Gase wegen ihrer geringen Dichte fast jedes verfügbare Volumen V ein.

Zahlenwerte: $\rho(\text{Luft}) \approx 1.3 \text{ kg/m}^3$, $\rho(\text{Wasser}) \approx 1003 \text{ kg/m}^3$, $\rho(\text{Platin}) \approx 21400 \text{ kg/m}^3$

a) Gase

Für nicht-strömende, ideale Gase gilt das Gesetz von Boyle und Marriotte:

$PV = \text{konst.}$

$\Rightarrow V = \frac{\text{konst.}}{P} \Rightarrow \frac{dV}{dP} = -\frac{\text{konst.}}{P^2} = -\frac{V}{P}$

D.h. Gase sind kompressibel. Erhöhung des Drucks führt zu Verringerung des Volumens ($dV/dP < 0$).

Die **Kompressibilität** κ ist ein Maß dafür, wie stark sich das Volumen eines Körpers bei Druckänderung verändert:

$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP}$

Der Kehrwert von κ ist der **Kompressionsmodul** K :

$K \equiv \frac{1}{\kappa} = -V \frac{dP}{dV}$ Dimension $\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa} \right]$

Wie Elastizitätsmodul ist der Kompressionsmodul eine Materialgröße.

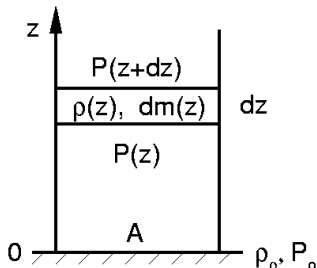
Zahlenwerte: $K(\text{Aluminium}) = 73 \text{ GPa}$, $K(\text{Plexiglas}) = 3.6 \text{ GPa}$, $K(\text{H}_2\text{O}) \approx 2 \text{ GPa}$, $K(\text{Luft}) \approx 10\text{-}100 \text{ kPa}$

Für Gase gilt mit $\frac{dV}{dP} = -\frac{V}{P}$

$\kappa = \frac{1}{P} \Rightarrow K = P$

Mit $PV = \text{konst.}$ und $m = \rho V \Rightarrow \rho \propto P$

Anwendungsbeispiel: Abhängigkeit des Luftdruckes von der Höhe in der Erdatmosphäre



\Rightarrow **Barometrische Höhenformel:**

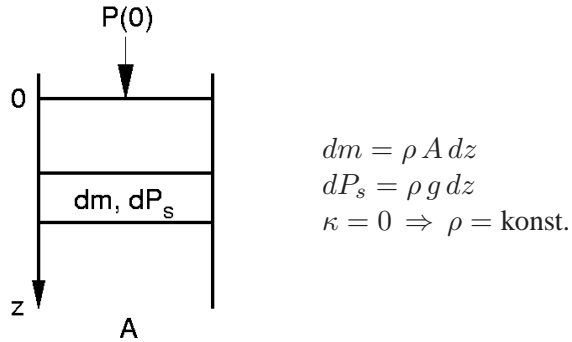
$P(z) = P_0 \exp \left[-g \frac{\rho_0}{P_0} z \right]$

Mit $\rho_0 = 1.3 \text{ kg/m}^3$ und $P_0 = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ halbiert sich der Luftdruck etwa alle 5 km Höhe.

b) Flüssigkeiten – Hydrostatik

Aufgrund der verschwindend kleinen Kompressibilität ist für Flüssigkeiten die Annahme von $\kappa \simeq 0$ eine gute Näherung ($\kappa_{\text{H}_2\text{O}} = 0.5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$).

D.h. für die Druckverteilung in einer Flüssigkeitssäule:



\Rightarrow Für den hydrostatischen Druck P_s in Tiefe z :

$P_s(z) = \frac{F(z)}{A} = \frac{m(z)g}{A} = \frac{\rho A z g}{A} = \rho z g$

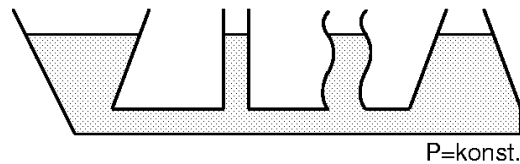
- Lineare Zunahme des Druckes mit der Tiefe
- Der hydrostatische Druck in einer Flüssigkeit hängt nur von der Höhe der Flüssigkeitssäule ab.

Z.B. $\rho_{\text{H}_2\text{O}} \simeq 1 \text{ g/cm}^3$: Der Druck nimmt um 10^5 Pa (= 1 bar) etwa alle 10 m Tiefe zu.

Folgen der Druckverteilung in einer Flüssigkeit:

1) Hydrostatisches Paradoxon:

Versuch: Der Bodendruck in einem Gefäß ist abhängig von der Füllhöhe, nicht von der Füllmenge.

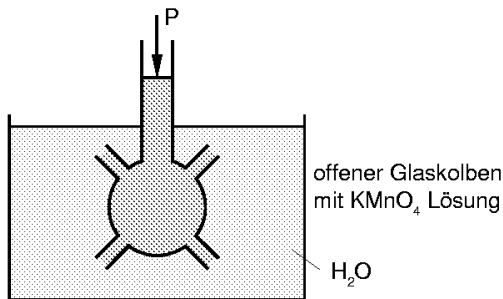


Da in Flüssigkeiten keine stationären Scherkräfte auftreten, sind die Kräfte auf die Wände immer senkrecht zur Wand. Druckunterschiede am Boden der einzelnen Gefäßteile werden durch ihre Verbindung ausgeglichen: \Rightarrow gleiche Füllhöhe in den unterschiedlichen Gefäßteilen.

2) Pascal'sches Prinzip:

Wird auf eine Flüssigkeit in einem Gefäß ein externer Druck ausgeübt, so verteilt sich der Druck gleichmäßig auf jedes Volumenelement der Flüssigkeit und auf die Wand des Gefäßes.

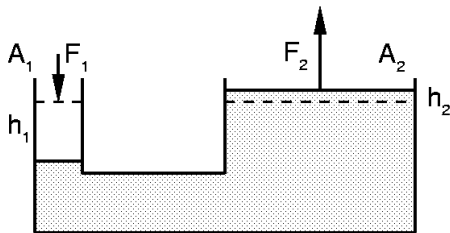
Versuch: Allseitigkeit des Druckes



Ein gläserner Rundkolben mit offenen Glasröhren an der Seite wird mit violetter Kaliumpermanganatlösung gefüllt und in ein Wasserbecken getaucht.

Beim Druck auf den Kolben entströmt aus allen Röhren gleichermaßen die farbige Lösung.

Anwendung: Hydraulische Presse



Senken des Flüssigkeitsspiegels im dünnen Rohr um Höhe h_1 führt zum Anstieg des Flüssigkeitsspiegels im dicken Rohr um h_2 , wobei gilt ($\kappa = 0$):

$$V = h_1 A_1 = h_2 A_2 = \text{konst.}$$

Drückt man mit Kraft F_1 auf A_1 und bewegt den Kolben dabei um h_1 leistet man die Arbeit $W_1 = h_1 F_1$, die im dicken Rohr als $W_2 = h_2 F_2$ wieder frei wird.

$$\text{Mit } W_1 = W_2 \Rightarrow F_2 = \frac{h_1}{h_2} F_1 = \frac{A_2}{A_1} F_1$$

(vgl. Hebelgesetz)

\Rightarrow Durch großen Flächenunterschied Transformation von kleinen in große Kräfte.

Versuch: Sprengen eines Eisenbolzens mit einer hydraulischen Presse

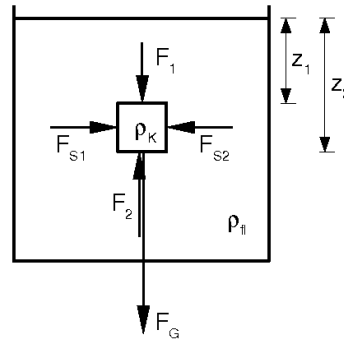
3) Auftrieb

Ein starrer Körper mit Dichte ρ_k und Volumen V_k erfährt in einer Flüssigkeit der Dichte ρ_{fl} die Auftriebskraft F_A .

$$\vec{F}_{s1} + \vec{F}_{s2} = 0$$

Mit $F_1 = \rho_{fl} g z_1 A$ und $F_2 = \rho_{fl} g z_2 A$ ist die Auftriebskraft:

$$F_A = F_2 - F_1 = \rho_{fl} g A (z_2 - z_1) = \rho_{fl} g V_k$$



\Rightarrow Die Auftriebskraft entspricht der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit und ist ihr entgegengesetzt gerichtet.

\Rightarrow Die Gewichtskraft F_G des Körpers wird in der Flüssigkeit um die Auftriebskraft verringert (Prinzip des Archimedes).

Versuch: Ein Körper an einer Federwaage wird in ein Wasserbecken getaucht. \Rightarrow Die Kraft auf die Feder verringert sich.

Das Volumen des dabei verdrängten Wassers entspricht dem Volumen des eingetauchten Körpers.

$$\text{Mit der Gewichtskraft des Körpers } F_G = \rho_k g V_k$$

gilt für: $F_G < F_A \rightarrow \rho_k < \rho_{fl}$ Körper schwimmt

$F_G = F_A \rightarrow \rho_k = \rho_{fl}$ Körper schwebt

$F_G > F_A \rightarrow \rho_k > \rho_{fl}$ Körper sinkt

Versuch: Kartesischer Taucher

Eine Hohlfigur mit kleiner Öffnung in der Mitte wird in ein Wassergefäß getaucht. Bei geeigneter, in der Figur eingeschlossener Luftmenge, schwebt die Figur.

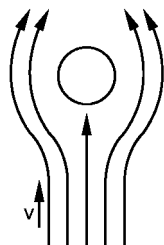
Wird der Druck im Gefäß von außen erhöht, so verringert sich das Volumen der eingeschlossenen Luftmenge ($\kappa_{Luft} \gg 0$) und die Figur sinkt.

2.5.3 Strömung

Die Bewegung von/in Flüssigkeiten und Gasen unterliegt für kleine Geschwindigkeiten gleichen Gesetzmäßigkeiten. Z.B. kann bis etwa einviertel der Schallgeschwindigkeit in Luft ($v_l \simeq 340 \text{ m/s}$), Luft als inkompressible Flüssigkeit betrachtet werden.

(Bei hohen Geschwindigkeiten werden Gase zusammengedrückt, dabei ändert sich ihre Temperatur.)

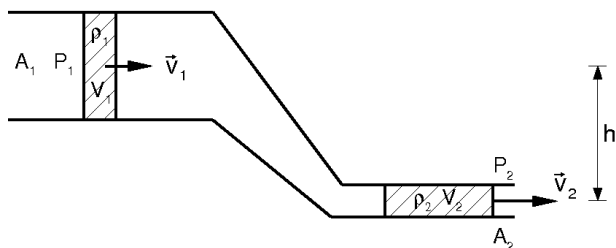
Versuch: Ein Ball kann in einem Luftstrom aus einer Düse gehalten werden. Dabei wird die Gewichtskraft des Balles durch den kontinuierlichen Impulsübertrag der strömenden Teilchen auf den Ball aufgebracht. Positioniert bleibt der Ball durch den Unterdruck im Luftstrom.



Bei einem leichten Tischtennisball kann der Luftstrom sogar um etwa 30° geneigt werden, ohne dass der Ball aus dem Luftstrom fällt.

Strömung ist die Bewegung eines Volumenelements V einer Flüssigkeit mit ortsabhängiger Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r})$. Ursache hierfür ist eine Druckdifferenz entlang der Strömungsrichtung.

Da die Masse erhalten bleibt, muss durch jede Querschnittsfläche A einer Röhre in derselben Zeitspanne gleichviel Flüssigkeit strömen.



$$\Rightarrow V_1 \rho_1 = V_2 \rho_2 \quad \Rightarrow A_1 v_1 \Delta t \rho_1 = A_2 v_2 \Delta t \rho_2$$

Für inkompressible Flüssigkeiten/Gase:

$$\rho = \text{konst.} \Rightarrow V_1 = V_2$$

$$\Rightarrow A v \rho = \text{konst.}$$

Kontinuitätsgleichung

Durch den Druckunterschied $\Delta P = P_1 - P_2$ wird an der Flüssigkeit die Arbeit $\Delta W = \Delta P V$ verrichtet \Rightarrow Änderung in der kinetischen Energie
Berücksichtigt man noch die Änderung der potenziellen Energie im Schwerfeld $\Delta E_{pot} = \rho g h V$:

$$\Delta P V + \rho g h V + \frac{1}{2} \rho V (v_1^2 - v_2^2) = 0$$

\Rightarrow **Bernoulli-Gleichung:** (D. Bernoulli, 1700-1782)

$$P + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{konst.}$$

Die Summe aus statischem Druck (P), dynamischem Druck ($\frac{1}{2} \rho v^2$) und Schweredruck ($\rho g h$) ist konstant.

Spezialfall: Rasch strömende Gase / Flüssigkeiten mit

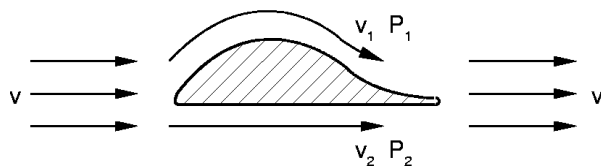
$$\frac{1}{2} \rho v^2 \gg \rho g h:$$

$$\Rightarrow P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

D.h. bei hoher Strömungsgeschwindigkeit niedriger Druck.

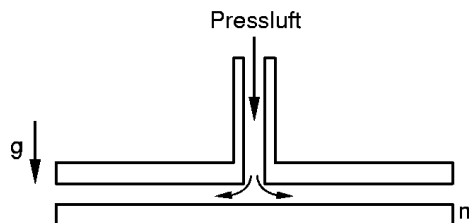
Anwendungen: Dynamischer Auftrieb

Versuch: Messung der resultierenden Auftriebskraft einer Flugzeugtragfläche.



Aufgrund der Form der Tragfläche ist $v_1 > v_2 \Rightarrow P_2 > P_1$. D.h. Unterdruck über der Tragfläche liefert Kraft nach oben.

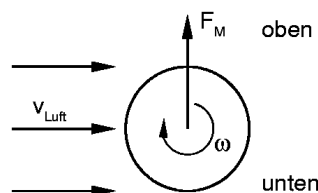
Versuch: Hydrodynamisches Paradoxon



Bläst man Luft durch ein Rohr, an dessen unterem Ende eine durchbohrte Scheibe der Fläche A befestigt ist, so wird eine zweite Scheibe der Masse m und der Fläche A nach oben an die erste herangezogen, wenn die durch den Unterdruck durch die ausströmende Luft bewirkte Kraft größer ist als $m g$: $\frac{1}{2} \rho v^2 A > m g$

Versuch: Magnuseffekt

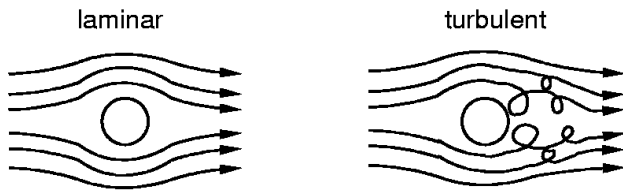
Ein rotierender Ball bewegt sich mit translatorischer Geschwindigkeit relativ zur Luft. Reibung der Luft mit der Balloberfläche führt zu einer größeren Geschwindigkeit der Luft an der Oberseite als an der Unterseite des Balles.



\Rightarrow Querkraft F_M senkrecht zur Drehrichtung (angeschnittener Ball)

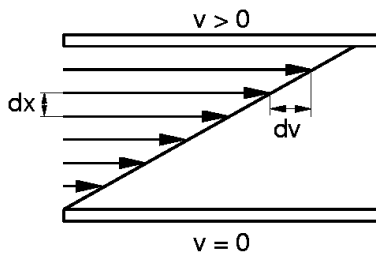
2.5.4 Viskosität und Reibung

Bei der Strömung von Flüssigkeiten unterscheidet man zwischen laminarer und turbulenter Strömung.



Ein Rohr wird von Wasser durchströmt. Bringt man kontinuierlich über Düsen Tinte auf der einströmenden Seite ein, so zeigt sich bei geringen Strömungsgeschwindigkeiten der Tintenfadens als Stromlinie, während für hohe Geschwindigkeiten Wirbel (Turbulenzen) auftreten (*Versuch*).

Laminare Strömung: Einzelne Flüssigkeitsschichten (Lamine) gleiten gegeneinander ohne sich zu vermischen. Dabei reiben aufgrund der Wechselwirkung zwischen den Flüssigkeitsmolekülen die einzelnen Lamine aneinander.



Bewegt man bei einem System aus einer Flüssigkeitsschicht zwischen zwei Platten der Oberflächen A die eine Platte relativ zur anderen mit der Geschwindigkeit v , so muss man die Reibungskraft F_R aufbringen:

$$F_R = \eta A \frac{dv}{dx}$$

F_R ist dabei direkt proportional zum Geschwindigkeitsgefälle dv/dx und zur Oberfläche der einzelnen Lamine.

Bei festen Körpern wächst die Scherspannung $\tau = F/A$ mit zunehmender Verformung. Die **innere Reibung** in Flüssigkeiten ist dagegen proportional zur Verformungsgeschwindigkeit:

$$\Rightarrow \tau = \eta \frac{dv}{dx}$$

Der Proportionalitätsfaktor η ist die Zähigkeitskonstante oder die Viskosität.

Dimension $\left[\frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} = \text{Pa s} \right]$ (Pascalsekunden)

Die Viskosität sinkt exponentiell mit der Temperatur:
Z.B. Glycerin: 273 K: 10 Pa s; 333 K: 0.08 Pa s
Natriumsilikat: 1000 K: 10^{10} Pa s; 1600 K: 10 Pa s

Zahlenwerte in Pa s bei 20°C:

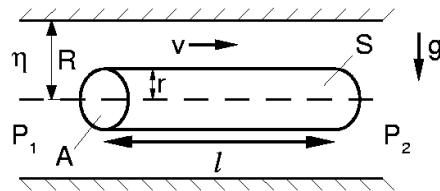
Luft	$1.7 \cdot 10^{-5}$	Glycerin	1.5
Wasser	$1.0 \cdot 10^{-3}$	Honig	3 – 8
Olivenöl	$8.1 \cdot 10^{-2}$	Pech	10^7

Anwendung: Laminare Strömungen durch Rohre

Versuch: Der Volumenstrom durch ein Rohr hängt von der 4. Potenz des Radius des Rohres ab.

Durch eine Druckdifferenz wird in einem Rohr mit Radius R und Länge l eine stationäre Strömung aufrecht erhalten. Aus Symmetriegründen kann die Strömungsgeschwindigkeit v nur von der Entfernung r von der Rohrmitte abhängen.

S ist die Mantelfläche eines Kreiszyinders im Abstand r , A seine Stirnfläche.



Treibende Druckkraft $F_p = (P_1 - P_2) A = \pi r^2 \Delta P$

Reibungskraft: $F_R(r) = -\eta S \frac{dv(r)}{dr} = -\eta 2\pi r l \frac{dv(r)}{dr}$

Im stationären Fall: $\frac{dv}{dl} = 0$

$$\Rightarrow F_p = F_R \Rightarrow r \Delta P = -2\eta l \frac{dv(r)}{dr}$$

$$\Rightarrow v(r) = -\frac{\Delta P}{4\eta l} r^2 + c$$

Randbedingung: $v(R) = 0 \Rightarrow c = \frac{\Delta P}{4\eta l} R^2$

$$\Rightarrow v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

Parabolisches Geschwindigkeitsprofil mit:

$$v_{max} = v(0) = \frac{\Delta P R^2}{4\eta l}$$

Für den Volumenstrom durch das Rohr $\langle Av \rangle_R$ folgt durch Integration:

$$\langle Av \rangle_R = \int_0^R v(r) 2\pi r dr = \frac{\Delta P \pi}{2\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr$$

und damit das **Hagen-Poiseuille'sche Gesetz**:

$$\Rightarrow \langle Av \rangle_R = \frac{\pi}{8} \frac{\Delta P}{\eta l} R^4$$

Beispiel Blutgefäße:

Führen Kalkablagerungen zu einer 20%igen Verringerung des Arterienradius, verringert sich der Blutdurchfluss um den Faktor 2.5 ($1/0.8^4$).

2.6 Schwingungen und Wellen

Schwingungen und die damit eng verwandten Wellenphänomene gehören zu den am weitesten verbreiteten Phänomenen der Physik.

Beispiele:

- Elektromagnetische Wellen (schwingende elektrische und magnetische Felder): Rundfunk, Mikrowelle, Infrarot, Licht, UV, Röntgen- und γ -Strahlung
- Schwingungen von Atomen in Festkörpern: Wärme, Gitterschwingungen (Phononen)
- Schwingungen in Atomkernen: Kernspaltung
- Materiewelle (Welle-Teilchen-Dualismus)
- Mechanische Schwingungen und Wellen: z.B. Pendel, Wasserwellen, Schallwellen

Kennzeichen aller Schwingungen ist eine Gleichgewichtslage und eine rücktreibende Kraft in Richtung dieser Gleichgewichtslage.

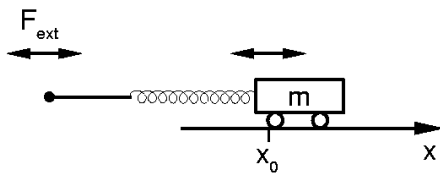
2.6.1 Erzwungene Schwingung und Resonanz

Wird die Schwingung eines Körpers durch eine periodisch wirkende Kraft $F_{ext}(t)$ angeregt, kann dies zu Resonanzerscheinungen führen.

Für die Bewegungsgleichung eines solchen Systems ergibt sich:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = F_{ext}/m$$

Dabei ist ω_0^2 die Eigenfrequenz der Schwingung und $\gamma \dot{x}$ ein Term, der die Dämpfung der Schwingung durch Reibung berücksichtigt.



Versuch: Pohl'scher Resonanzapparat

Der Versuch zeigt Amplitude und Phase einer erzwungenen Schwingung in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω_{ext} der Anregung $F_{ext}(t)$ und der Dämpfung γ der Schwingung.

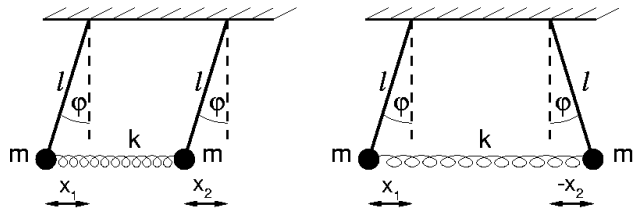
Beobachtung: Für γ gegen Null und $\omega_{ext} \approx \omega_0$ kommt es nach einem Einschwingvorgang zu einer Resonanz. D.h. die Amplitude divergiert für $\omega_{ext} = \omega_{res}$, wenn die Dämpfung $\gamma \rightarrow 0$ (Resonanzkatastrophe).

Versuch: Zerstörung eines Glases durch Schall

2.6.2 Gekoppelte Oszillatoren

Ein harmonischer Oszillator hat einen Schwingungsfreiheitsgrad und eine Eigenfrequenz ω_0 und somit eine Resonanz. Gekoppelte Oszillatoren sind Systeme mit mehreren Schwingungsfreiheitsgraden.

Beispiel: Gekoppelte Pendel (*Versuch # 1646*)



Zwei identische mathematische Pendel mit Masse m und Fadenlänge l sind durch eine Feder mit Federkonstante k gekoppelt.

Beobachtung: Wird eines der Pendel in Bewegung versetzt, so beeinflusst es über die Feder die Bewegung des anderen Pendels. Dabei wird kontinuierlich Energie von dem einen auf das andere Pendel übertragen.

Kann sich eine Schwingung vom Ort ihrer Anregung aufgrund von Kopplungen an benachbarte, schwingungsfähige Systeme ausbreiten, so spricht man von einer Welle.

Versuch: Torsionswellenmaschine

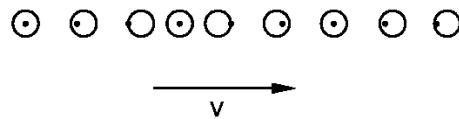
Ausbreitung einer Welle in einem System aus 32 gekoppelten Torsionspendeln.

2.6.3 Fortschreitende Wellen

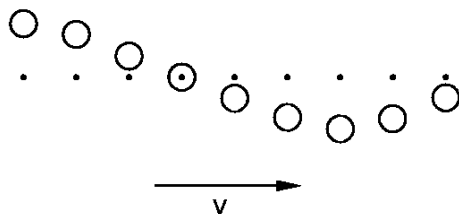
Wellen transportieren Energie und Impuls durch den Raum ohne Transport von Materie.

Je nach Auslenkung bezüglich der Ausbreitungsrichtung unterscheidet man zwischen:

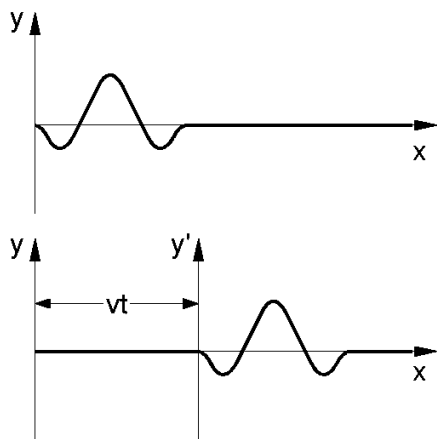
longitudinale Welle



transversale Welle



Versuch: Ausbreitung eines Wellenberges auf einem Seil (Seilwelle)



Beobachtung: Nach einer raschen horizontalen Auslenkung an einem Seilende breitet sich ein Wellenberg mit Ausbreitungsgeschwindigkeit v aus. Bewegt man das Seil an einem Ende horizontal periodisch hin und her, erhält man eine periodische Welle, d.h. eine sich ausbreitende Schwingung.

Dabei gilt: $y(x, t) = f(x - vt)$, wobei f die Form der Welle berücksichtigt.

Eine transversale Welle, die sich in einem Festkörper ausbreitet führt zu Scherung (Scherwelle), die in einem Masselement dm zu einer rücktreibenden Kraft $dF = d\tau A$ führt.

Mit der Näherung für kleine Amplituden ist die

$$\text{Scherung } \gamma \approx \tan \gamma = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_t$$

$$\text{Für konstante Zeit } t \text{ ist: } d\gamma = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

$$\Rightarrow d\tau = G d\gamma = G \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \quad \text{mit Schermodul } G$$

Die rücktreibende Kraft beschleunigt dabei das Masselement $dm = \rho dV = \rho A dx$. Mit $dF = d\tau A$

$$\Rightarrow \text{Bwgl.: } A G \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = \rho A dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Aus der Lösung der Bewegungsgleichung folgt mit $y(x, t) = f(x - vt)$ für die eindimensionale Ausbreitung einer transversalen Anregung:

$$\Rightarrow \text{Wellengleichung: } \frac{\partial y^2}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\text{mit } v_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit v_t einer Scherwelle im Festkörper

Analog zur Scherwelle ergibt sich für eine longitudinale Welle, die sich in einem langen, dünnen Festkörper ausbreitet ($\lambda >$ Ausdehnung in Querrichtung, sonst Querkontraktion berücksichtigen):

$$v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{mit Elastizitätsmodul } E$$

Longitudinale Wellen breiten sich über Kompression und Ausdehnung fort (Dichtewellen).

Da in Flüssigkeiten und Gasen keine stationären Scherkräfte auftreten, können sich keine transversalen Wellen ausbreiten. Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer longitudinalen Welle ergibt sich in Flüssigkeiten:

$$v_l = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad \text{mit Kompressionsmodul } K$$

In Gasen gilt für höhere Frequenzen (z.B. Schall): Änderung des Druckes führt neben Änderung der Dichte zu Änderung der Temperatur (\rightarrow 4.3.1).

$$\Rightarrow v_l = \sqrt{\frac{\gamma K}{\rho}} \quad \text{mit Adiabatenkoeffizient } \gamma$$

Beispiel Luft: $K = P_0 = 10^5 \text{ Pa}$, $\rho_0 = 1.3 \text{ kg m}^{-3}$, $\gamma = 1.4 \Rightarrow v_l = 340 \text{ m/s}$

Versuch: Messung der Schallgeschwindigkeit in Luft über Messung der Zeitdifferenz, in der ein kurzes Geräusch in zwei Mikrofonen im Abstand von einem Meter aufgenommen wird ($\Delta t \approx 2.9 \text{ ms}$).

Zahlenwerte für v_l in [m/s] bei 20°C :

Al	Pb	Stahl	Glas	Holz	Granit
5110	1200	5100	5400	3800	4000
Glycerin	Wasser	Luft	Helium		
1923	1483	340	971		

$$\text{Dabei ist } v_t = \sqrt{G/E} v_l \approx 0.6 v_l$$

Die Materialgrößen Elastizitätsmodul E und Schermodul G werden so auch durch Messung der Schallgeschwindigkeiten präzise bestimmt.

Alle Wellen der Form $y(x, t) = f(x - vt)$ sind Lösungen der Wellengleichung.

Spezialfall: Sinusförmige (harmonische) Wellen

Mit Wellenlänge λ , Periode T und Amplitude A :

$$\Rightarrow y(x, t) = A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right]$$

$$= A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi v}{\lambda} t \right]$$

D.h. für periodische Wellen Periodizität im Raum:

Für $t = \text{konst.}$ $y(x, t_0) = y(x + \lambda, t_0)$

und Periodizität in der Zeit:

Für $x = \text{konst.}$ $y(x_0, t) = y(x_0, t + T)$

Mit Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

und Definition einer Wellenzahl $k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$

schreibt sich $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$

Eingesetzt in die Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A \omega^2 \sin(kx - \omega t);$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -A k^2 \sin(kx - \omega t)$$

$$\text{mit } \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Rightarrow v^2 = \frac{\omega^2}{k^2}; \quad \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda}$$

$$\Rightarrow v = f \lambda$$

D.h. die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist gleich Frequenz mal Wellenlänge.

Beispiel: Elektromagnetische Wellen – schwingende, magnetische und elektrische Felder (transversale, periodische Sinuswellen)

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Vakuum ist die Lichtgeschwindigkeit $\Rightarrow c = f \lambda$

2.6.4 Dopplereffekt

C. Doppler formulierte 1842 das Dopplerprinzip um eine Erklärung für die unterschiedlichen Farben der Sterne zu haben (relativist. Dopplereffekt). 1845 gelang Buys-Ballot der experimentelle Nachweis des Prinzips auch beim Schall.

Versuch: Bewegt sich eine Schallquelle relativ zum Beobachter, nimmt der Beobachter eine veränderte Frequenz ($f_b \neq f_0$) wahr (Schallgeschwindigkeit v_l).

Dabei drei Beteiligte: Schallquelle (Pfeife) q - Medium (Luft) m - Beobachter (Mikrofon/Ohr) b

Man unterscheidet die Fälle:

1) Quelle bewegt sich ($v_q > 0$) im ruhenden Medium ($v_m = 0$) bei ruhendem Beobachter ($v_b = 0$)

Während einer Zeitspanne Δt :

- Quelle sendet $\Delta N = f_0 \Delta t$ Wellenberge aus

- Jeder Wellenberg bewegt sich um $v_l \Delta t$ weiter

- Quelle bewegt sich um $v_q \Delta t$ weiter

\Rightarrow Abstand Δx zwischen 1. und ΔN . Wellenberg in Bewegungsrichtung der Quelle:

$$\Delta x = (v_l - v_q) \Delta t$$

\Rightarrow Vor der Quelle ist die Wellenlänge:

$$\lambda_v = \frac{\Delta x}{\Delta N} = \frac{(v_l - v_q) \Delta t}{\Delta N} = \frac{v_l - v_q}{f_0}$$

$$= \lambda_0 \left(1 - \frac{v_q}{v_l} \right) \quad \text{mit } \lambda_0 = \frac{v_l}{f_0}$$

Analog hinter der Quelle: $\lambda_n = \lambda_0 \left(1 + \frac{v_q}{v_l} \right)$

Mit $f = v_l / \lambda$

$$f_v = \frac{f_0}{1 - v_q/v_l} > f_0 \quad q \text{ nähert sich } b$$

$$f_n = \frac{f_0}{1 + v_q/v_l} < f_0 \quad q \text{ entfernt sich von } b$$

Beispiel: Vorbeifahrendes Martinshorn

2) Beobachter bewegt sich mit v_b und $v_q = v_m = 0$.

Bewegt sich der Beobachter auf die Quelle zu, ist für ihn die Geschwindigkeit der Welle: $v_l + v_b$

$$f_z = \frac{v_l + v_b}{\lambda_0} = f_0 \left(1 + \frac{v_b}{v_l} \right) > f_0$$

Entfernt sich b von q ergibt sich demnach:

$$f_w = f_0 \left(1 - \frac{v_b}{v_l} \right) < f_0$$

Für die von b detektierte Frequenz ergibt sich im allgemeinen Fall bei Bewegung von Quelle und Beobachter aus Zusammenfassung von 1) und 2):

$$f_b = f_0 \frac{(1 \pm v_b/v_l)}{(1 \mp v_q/v_l)}$$

Dabei oberes Vorzeichen, wenn q und b sich annähern und unteres Vorzeichen, wenn q und b sich voneinander entfernen.

3) Medium bewegt sich mit v_m (z.B. Wind)

$\Rightarrow v_l$ ersetzen durch $\vec{v}_l + \vec{v}_m$.

4) $v_q \geq v_l$ (z.B. Überschallflugzeug)

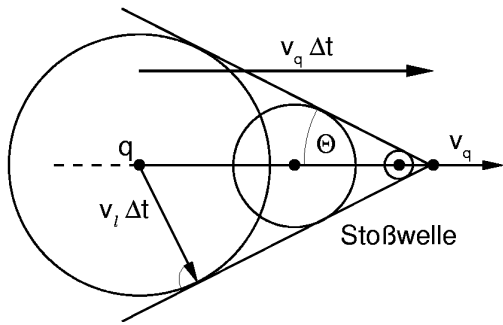
\Rightarrow keine Wellen vor der Quelle

Wellenberge addieren sich hinter der Quelle auf:

\Rightarrow Stoßwelle, die bei Schallwellen als Überschallknall wahrgenommen wird.

Wird die Geschwindigkeit der Quelle größer als die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen bildet sich ein Mach'scher Kegel aus (E. Mach 1838-1916).

Dabei gilt: $\sin \Theta = \frac{v_l}{v_q} = \frac{1}{\text{Mach-Zahl}}$



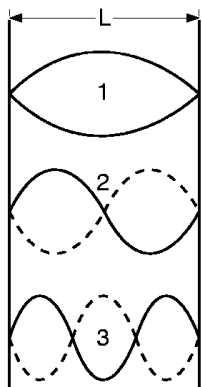
Film F14: Kondensation von Wasserdampf durch die Stoßwelle eines Überschallflugzeuges

Dopplereffekte treten auch bei Wasserwellen auf, z.B. bei Bugwellen von Schiffen. *Versuch:* Erzeugung von periodischen Wasserwellen auf der Wasseroberfläche einer Wellenwanne mittels eines Punkttupfers. Beobachtung: Horizontale Bewegung des Punkttupfers führt zu unterschiedlichen Wellenlängen λ der Wasserwellen vor und hinter der Quelle. Wird die Geschwindigkeit des Punkttupfers größer als die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wasserwellen: Ausbildung eines Mach'schen Kegels.

2.6.5 Überlagerung von Wellen

Versuch: Reflexion einer Torsionswelle an einem festen Ende. Beobachtung: Die Auslenkung wird am festen Ende gespiegelt reflektiert.

Sind beide Enden fest eingespannt, z.B. bei der Saite eines Musikinstrumentes gilt für die Frequenz der Schwingung der Saite: $f = v/\lambda$



Länge der Saite: L

$$\Rightarrow L = n \frac{\lambda}{2}$$

($n = 1, 2, 3 \dots$)

$n =$ Anzahl der "Bäuche"

Dabei ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit $v = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$ mit der Zugspannung σ

$$\text{Mit } \lambda = \frac{2L}{n} \Rightarrow f = n \frac{\sqrt{\sigma/\rho}}{2L}$$

D.h., die Saite eines Musikinstrumentes verändert ihren Ton bei gegebenen L durch Veränderung von σ (Stimmvorgang), bzw. durch Änderung von L (Abgreifen).

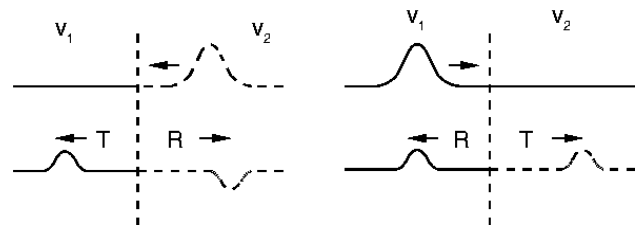
Beispiel: Nachweisgrenze des menschlichen Ohres Hörbarer Schall: $16 \text{ Hz} < f < 16 \text{ kHz}$ mit maximaler Empfindlichkeit bei 1 kHz (Baby Geschrei).

In 2-dim: Chladni'sche Klangfiguren. *Versuch:* Erzeugung von Eigenschwingungen auf einer horizontalen Platte durch einen Violinbogen. Sandkörner auf der Platte werden durch Eigenschwingungen hin- und hergeschüttelt und häufen sich so auf den nicht schwingenden Knotenlinien an. (Veränderungen des Knotenlinienmusters durch Änderung der Randbedingungen)

Analog: Kundt'sche Staubfiguren. *Versuch:* In einem mit ein wenig Korkmehl gefülltem, einseitig verschlossenem Glasrohr werden mit einer Pfeife stehende Wellen angeregt. Beobachtung: Das Korkmehl häuft sich in den Knoten an.

Eine stehende Welle lässt sich auch mittels dem Ruben'schen Flammenrohr zeigen. *Versuch:* Ein Rohr mit einer Reihe kleiner Löcher trägt in der Mitte einen Anschluss für Propangas. Über einen Lautsprecher werden im Rohr stehende Wellen angeregt. Nach Entzünden des Gases bilden sich die stehenden Schallwellen im Rohr auf der Flammenreihe ab.

Im Allgemeinen gilt: Bei Reflexion an der Grenze zwischen zwei Medien unterschiedlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit mit $v_1 > v_2$, ist die Reflexion nicht vollständig und es kommt auch zu Transmission.



Anwendung Ultraschall: Ausgesandte Ultraschallpulse werden an Grenzflächen von Bereichen unterschiedlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit reflektiert.

Bei Reflexion an einem Medium mit niedriger Ausbreitungsgeschwindigkeit v_2 kommt es nicht zu dem bei der Reflexion am festen Ende ($v_1 \rightarrow \infty$) beobachteten "Phasensprung".

Versuch Torsionswellenmaschine: Reflexion einer Torsionswelle am oberen Ende, einmal fest eingespannt, einmal frei schwingend

2.6.6 Wasserwellen

Während die bisher behandelten Dichte- und Scherwellen Raumwellen sind, sind Wasserwellen Oberflächenwellen.

Für die Beschreibung ihrer Ausbreitung können in guter Näherung vernachlässigt werden:

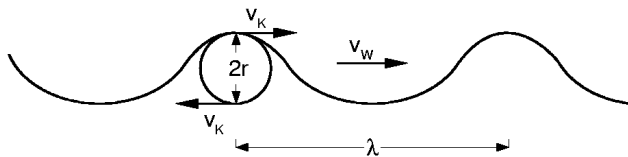
- Oberflächenspannung für $\lambda > 0.05$ m
- Reibung
- Dichte und kinetische Energie der Luft
- Wirbelbildung

⇒ Einzige wirkende Kraft: Gewichtskraft F_G

Versuche im Wellenkanal zeigen: Auch Wasserwellen transportieren Energie aber keine Materie. Die Wellenausbreitung erfolgt über Kreisbewegungen einzelner Wasserteilchen um ihre Ruhelage. An der Oberfläche ist der Kreisbahndurchmesser $2r$ gleich dem Höhenunterschied zwischen Wellenberg und Wellental.

Ist die Wassertiefe h größer als die Wellenlänge λ
→ Schwerewellen (z.B. Dünungswellen)

Beobachtungen: Bewegung der Wasserteilchen nimmt exponentiell mit dem Abstand von der Oberfläche ab. An der Oberfläche ist die Kreisbahngeschwindigkeit der Wasserteilchen $v_k = 2\pi r/T$.



Breitet sich die Welle mit v_w fort, so sieht ein mit der Welle mitschreitender Beobachter Wasserteilchen im Wellental mit

$$v_1 = v_w + \frac{2\pi r}{T}$$

und im Wellenberg mit

$$v_2 = v_w - \frac{2\pi r}{T}$$

bewegen. Für die Differenz der kinetischen Energien ergibt sich:

$$\Delta E_{kin} = \frac{m}{2} (v_1^2 - v_2^2) = \frac{4\pi r v_w m}{T}$$

Die Abnahme der potenziellen Energie von Wellenberg zu Wellental ist :

$$\Delta E_{pot} = m g 2r$$

Für $\Delta E_{pot} = \Delta E_{kin}$:

$$m g 2r = \frac{4\pi r v_w m}{T}$$

$$\Rightarrow \text{Ausbreitungsgeschwindigkeit } v_w = \frac{gT}{2\pi}$$

Für $2r \ll \lambda$, d.h. für kleine Amplitude kann die Wasserwelle als Sinuswelle betrachtet werden:

$$\text{Mit } v_w = \lambda f \Rightarrow T = \lambda/v_w$$

$$\Rightarrow v_w = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

(z.B. typische Dünungswellen:

$$\lambda = 50 \text{ m}, T = 6 \text{ s}, v_w = 30 \text{ km/h})$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit hängt von der Wellenlänge ab. In diesem Fall spricht man von **Dispersion**. Dispersion, d.h. verschiedene Ausbreitungsgeschwindigkeiten für die unterschiedlichen Partialwellen einer einmaligen Störung, führt zu räumlichen und zeitlichen Auseinanderlaufen des **Wellenpakets**, also zu einer Abnahme der maximalen Amplitude.

Beispiel: Wellenpaket an Schwerewellen, das durch ein Seebeben (breite Verteilung an Wellenlängen) ausgelöst wurde, richtet nur nahe des Epizentrums großen Schaden an.

Ist die Wellenlänge groß gegen die Wassertiefe gilt eine Flachwasser-Näherung. Experimente im Wellenkanal zeigen dann für die Ausbreitungsgeschwindigkeit:

$$v_w = \sqrt{gh}$$

d.h. v_w ist unabhängig von der Wellenlänge.

Beispiel: Tsunami

Ein Wellenpaket aus Wellen großer Wellenlänge breitet sich dispersionsfrei mit hoher Geschwindigkeit aus (kein Auseinanderlaufen) → Flutwelle.

Zahlenbeispiel: Wellenlänge 200 km, mittl. Tiefe 4 km
⇒ $v_w \approx 700$ km/h, Periode 1000 s

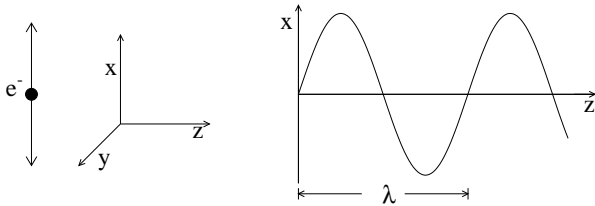
3 Optik

Optik ist die Lehre von Lichtstrahlen, die wir mit unseren Augen wahrnehmen können.

3.1 Eigenschaften von Lichtstrahlen

Lichtstrahlen bestehen aus elektromagnetischen Wellen. Ein zeitlich veränderliches Magnetfeld \vec{B} erzeugt ein elektrische Feld \vec{E} (Induktionsgesetz). Ein zeitlich veränderliches \vec{E} Feld erzeugt wiederum ein magnetisches Feld \vec{B} .

Einfaches Bild: Bewegte Ladungen erzeugen ein zeitlich variierendes elektrisches Feld, welches wiederum ein magnetisches Feld erzeugt.



Entlang der Achse der Schwingung der Ladung (z.B. Elektron) entsteht ein elektrisches Feld, das ein magnetisches Feld induziert, welches in einer Ebene senkrecht zu der des elektrischen Feldes schwingt und um einen Phasenwinkel $\frac{\pi}{2}$ verschoben ist. Elektromagnetische Welle sind transversale Wellen.

$$E(z, t) = \vec{E}_x \sin(kz - \omega t)$$

$$B(z, t) = \vec{B}_y \cos(kz - \omega t)$$

Für periodische Schwingungen ist der Zusammenhang zwischen Wellenlänge λ und Wellenzahl k :

$$k \lambda = 2\pi$$

Zwischen Kreisfrequenz ω , Frequenz f , Wellenlänge λ , der Energie E der Quanten (Photonen) und der Lichtgeschwindigkeit c bestehen die Relationen.

$$c = \lambda f \quad \omega = 2\pi f \quad E = hf = \hbar\omega \quad (\hbar = \frac{h}{2\pi})$$

Mit den Naturkonstanten:

Plank'sches Wirkungsquantum $h = 4.14 \cdot 10^{-15} \text{ eV s}$
 Vakuumlichtgeschwindigkeit $c = 2,9979 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Sichtbares Licht sind elektromagnetische Wellen mit Wellenlängen im Bereich von 390 nm bis 790 nm ($3.8 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ bis $7.7 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$). Dies entspricht Energien der Photonen im Bereich von etwa 1.6 eV bis 3.2 eV.

Spektrum elektromagnetischer Wellen ($c = f \lambda$):

f [Hz]	Bezeichnung	Erzeugung
$< 10^6$	Langwelle	Antenne
10^7	Mittelwelle	
10^8	TV, UKW	
10^9	Kurzwellen	
10^{10}		
10^{11}	Mikrowellen	Klystron
10^{12}		
10^{13}	Infrarot	Gitterschwingungen,
10^{14}	Licht	Wärmestrahlung
10^{15}		Übergänge zwischen Niveaus von Valenzelektronen
10^{16}	Ultraviolett	
10^{17}		Übergänge zwischen inneren Schalen der Atome, Bremsstrahlung
10^{18}	Röntgenstrahlung	
10^{19}		
10^{20}	Gammastrahlung	Übergänge in Atomkernen
$> 10^{21}$		

Licht wird in der Regel durch Anregung von Atomen erzeugt: u.a.

- Gasentladung (Spektralfarben)
- Erhitzung von Materialien (Glühlampe)
- Laser (light amplification by stimulated emission of radiation)

Für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum gilt:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad \mu_0: \text{magn. Feldkonstante}$$

$$\epsilon_0: \text{Dielektrizitätskonstante}$$

In Materie gilt:

$$c_{mat} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0}} \quad \epsilon_r: \text{relative Dielektrizitätskonst.}$$

$$\mu_r: \text{relative Permeabilität}$$

Dabei berücksichtigt ϵ_r die Polarisation der Moleküle im elektrischen Feld, was zu einer Abschwächung des Feldes führt ($\epsilon_r > 1$). μ_r berücksichtigt die Ausrichtung magn. Momente im magn. Feld (atomare magn. Momente). Für durchsichtige (Absorption klein), dia- und paramagnetische Stoffe ist $\mu_r \simeq 1$.

$$\Rightarrow c_{mat} = c/n \simeq c/\sqrt{\epsilon_r}$$

n bezeichnet man als Brechungsindex. D.h. die Geschwindigkeit des Lichts in Materie ist kleiner als die Vakuumlichtgeschwindigkeit.

Versuch: Ein Lichtblitz wird durch einen 2 m langen Plexiglaszylinder und durch Luft geschickt, am oberen Ende gespiegelt und unten detektiert. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Plexiglas ist $c_{plex} \simeq 0.7c$

Versuch: Der Lichtstrahl einer Glühlampe wird in einem Prisma gebrochen. Beobachtung: Das natürliche Licht (dito Glühlampe etc.) besteht aus vielen Wel-

lenängen, die mit Hilfe von Prismen in die verschiedenen Farben zerlegt werden kann.

ϵ_r hängt von λ ab $\Rightarrow n \rightarrow n(\lambda)$

blaues Licht: 400 nm ($0.4 \mu\text{m}$)

rotes Licht: 780 nm ($0.78 \mu\text{m}$)

Brechungsindizes für $\lambda = 589 \text{ nm}$ (gelbe Na Linie)

Vakuum $n = 1$ (exakt) Glas $n \sim 1.4 - 2.9$ (Sorte)

Luft $n = 1.00029$ Plexiglas $n = 1.49$

Wasser $n = 1.33$ Diamant $n = 2.42$

Versuche:

\rightarrow Licht wirft Schatten \rightarrow Abbildung von Gegenständen (geometrische Optik)

\rightarrow Werden die Strukturen vergleichbar mit der Wellenlänge des Lichts (Spalt, Lochblende) kommt es zu Interferenz- und Beugungseffekten (Wellenoptik)

3.2 Reflexion und Brechung

Trifft ein Lichtstrahl auf eine Grenzfläche zweier Medien mit unterschiedlichen Brechungsindizes $n_1 \neq n_2$, wird ein Teil des Lichtes reflektiert, ein Teil gelangt in das Medium mit n_2 (vgl. mechanische Wellen). Trifft der Lichtstrahl nicht senkrecht auf die Grenzfläche ändert sich die Richtung des Lichtstrahls (Brechung).

Versuch: Reflexion und Brechung eines Laserstrahles an einer Wasseroberfläche.

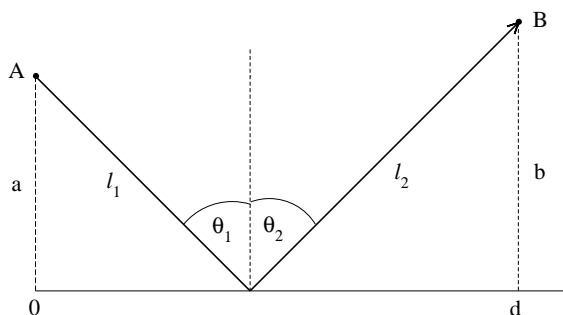
Beschreibung dieser Phänomene mit Hilfe des Fermat'schen Prinzips:

Die Laufzeit des Lichts zwischen zwei Punkten ist minimal (nicht der Weg).

D.h. auch, dass sich Lichtstrahlen in einem optisch homogenen Medium geradlinig ausbreiten.

3.2.1 Reflexion

Versuch: Reflexion an einem Spiegel



Beobachtung: Einfallswinkel gleich Ausfallwinkel

Die Laufzeit des Lichtstrahls beträgt $t(x) = L(x)/c$, wobei $L = l_1 + l_2$. Da sich das Medium in dem sich der Lichtstrahl von Punkt A nach Punkt B bewegt nicht ändert gilt $t(x)$ ist minimal, wenn $l(x)$ minimal ist.

$$L(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d-x)^2}$$

Ableitung:

$$\frac{dL}{dx} = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{1}{2} \frac{2x - 2d}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$$

Minimum für $\frac{dL}{dx} = 0$

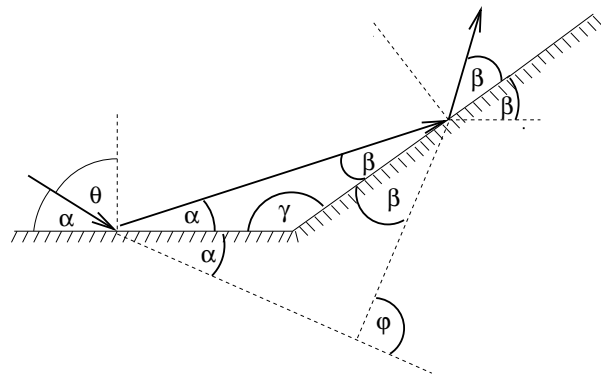
$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} \Rightarrow \frac{x}{l_1} = \frac{d-x}{l_2}$$

Dabei ist $\sin \theta_1 = \frac{x}{l_1}$ und $\sin \theta_2 = \frac{d-x}{l_2}$

\Rightarrow Für die Reflexion an einer Oberfläche:

Reflexionsgesetz: $\sin \theta_1 = \sin \theta_2 \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2$

Anwendungsbeispiel: Reflexion an zwei Planspiegeln



Für den Ablenkwinkel φ gilt:

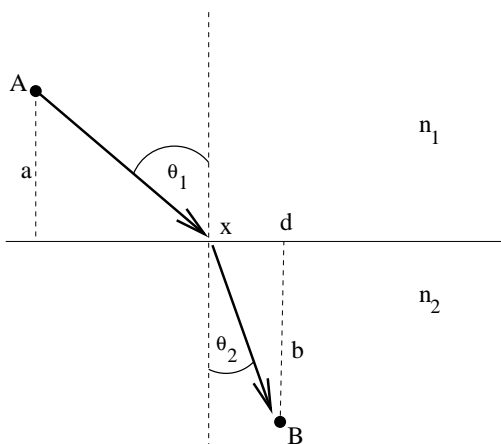
$$\varphi = 2\alpha + 2\beta = 2(180^\circ - \gamma) = 360^\circ - 2\gamma$$

\Rightarrow Der Ablenkwinkel φ ist unabhängig vom Einfallswinkel θ , d.h. eine genaue Orientierung des Spiegel-paares ist nicht notwendig.

Für $\gamma = 90^\circ \Rightarrow \varphi = 180^\circ$ ergibt sich ein Reflektor

3.2.2 Brechung

Erklärung der Brechung mit dem Fermat'schen Prinzip: Ist $n_2 > n_1$, ist die Lichtgeschwindigkeit $c_2 < c_1$. D.h. der Weg im dichteren Medium (n_2) ist kleiner als im dünneren Medium (n_1).



Herleitung des Brechungsgesetzes:

$$t = \frac{l_1}{c_1} + \frac{l_2}{c_2} = \frac{l_1 n_1}{c} + \frac{l_2 n_2}{c}$$

$$\Rightarrow ct(x) = n_1 \sqrt{a^2 + x^2} + n_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2}$$

Ableitung:

$$c \frac{dt}{dx} = n_1 \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + n_2 \frac{x-d}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$$

Minimum für $t(x)$ für $\frac{dt}{dx} = 0$

$$n_1 \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = n_2 \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{l_1} = n_2 \frac{d-x}{l_2}$$

Mit $\sin \theta_1 = \frac{x}{l_1}$ und $\sin \theta_2 = \frac{d-x}{l_2}$ folgt das

Brechungsgesetz: $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$

Spezialfall: **Totalreflexion**

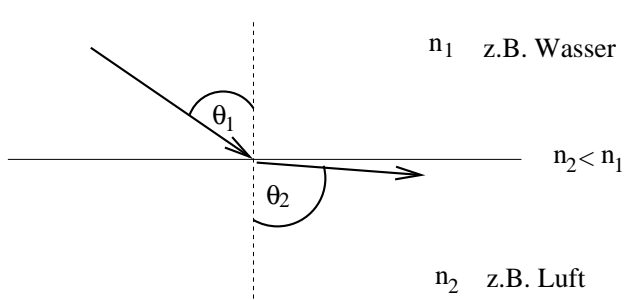
Brechung an einer Grenzfläche mit $n_2 < n_1$

Für den Brechungswinkel im Medium n_2 ergibt sich:

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1$$

Für $\sin \theta_1 = \frac{n_2}{n_1}$ ist $\sin \theta_2 = 1 \Rightarrow \theta_2 = 90^\circ$

D.h. der einfallende Lichtstrahl kann nicht in Medium n_2 eindringen und es kommt zu Totalreflexion.



Für die Grenzfläche Wasser – Luft (*Versuch*) ergibt sich ein kritischer Winkel für die Totalreflexion von:

$$\sin \theta_1 = \frac{1}{1.33} \Rightarrow \theta_1 = 48^\circ$$

Damit kann ein Laserstrahl durch einen gekrümmten Wasserstrahl geschickt werden (*Versuch*).

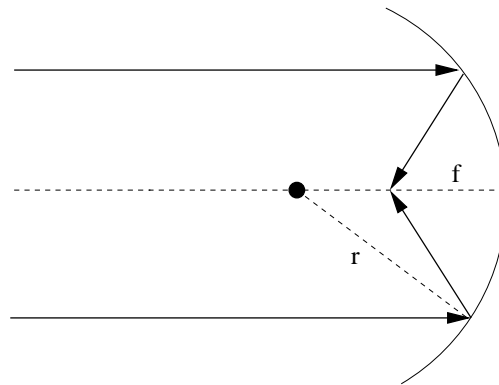
Anwendungsbeispiel: Lichtleiter (*Versuch*)

Ein Laserstrahl kann durch einen Lichtleiter mit Knoten geschickt werden (Glasfaserkabel).

3.3 Optische Abbildungen

3.3.1 Hohlspiegel

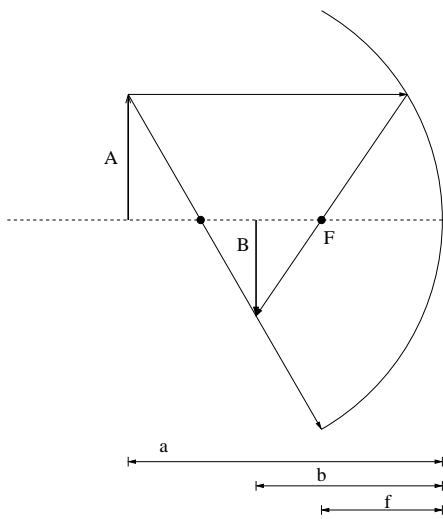
Konkaver, sphärischer Spiegel, der einem parallel zur optischen Achse einfallenden Lichtstrahl im Brennpunkt F fokussiert.



Aufgrund des Reflexionsgesetzes gilt für den Brennpunkt: $f = \frac{1}{2} r$, wobei r der Krümmungsradius des Spiegels ist.

Versuch: Das Licht einer Bogenlampe wird im Brennpunkt eines Hohlspiegels fokussiert. Die Energiedichte im Fokus reicht aus um ein Streichholz zu entzünden.

Anwendung von Hohlspiegeln in der Astronomie zur Abbildung und Vergrößerung von Sternen.

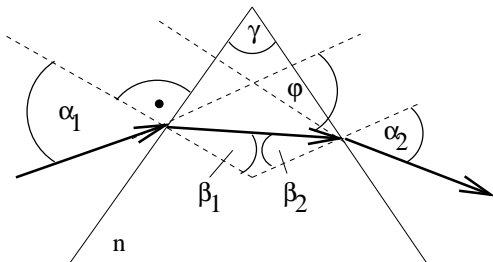


B ist der Schnittpunkt zweier Lichtstrahlen von Punkt A . D.h. in B ist die Abbildung scharf und die Intensität durch den größeren Raumwinkel, über den der Hohlspiegel das Licht sammelt, ebenfalls größer. Aus geometrischen Gründen ergibt sich der Abbildungsmaßstab (Vergrößerung) Γ zu:

$$\Gamma = \frac{b}{a} = \frac{f}{a - f}$$

3.3.2 Prisma

Prismen sind dreikantige Glaskörper und werden zur Ablenkung von Strahlen und zur Zerlegung des Lichts in seine Farben verwendet.



$$\gamma = 180^\circ - (90^\circ - \beta_1) - (90^\circ - \beta_2)$$

$$\gamma = \beta_1 + \beta_2$$

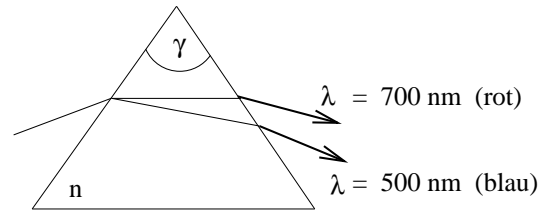
An den beiden Grenzflächen gelten die Brechungsgesetze $\sin \alpha_1 = n \sin \beta_1$ und $\sin \alpha_2 = n \sin \beta_2$

Für den Ablenkwinkel φ folgt:

$$\varphi = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma$$

Der Ablenkwinkel wird minimal, wenn $\alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \gamma/2$

Aufgrund der Abhängigkeit des Brechungsindex n von der Wellenlänge λ wird natürliches Licht in seine Spektralfarben zerlegt. Bei normaler Dispersion nimmt $n(\lambda)$ mit zunehmenden λ ab. D.h. $dn/d\lambda < 0$



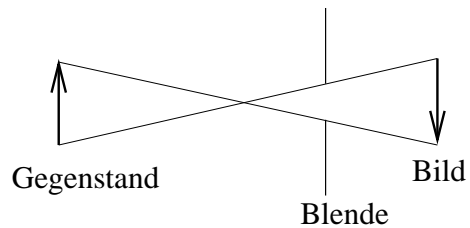
Brechungsindizes für Kronglas

Farbe	$\lambda(\text{nm})$	n
blau	486	1.5157
gelb	590	1.5100
rot	656	1.5076

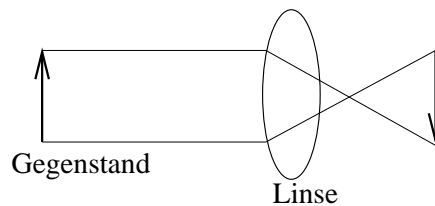
Der Brechungsindex $n(\lambda)$ eines Materials kann so über die Messung der Winkel bestimmt werden.

3.3.3 Linse

Bei einer Lochkamera (*Versuch*) wird die Abbildung mit kleinerem Blendendurchmesser schärfer. Problem: Die Helligkeit nimmt ebenfalls ab.



Bei der Abbildung von Gegenständen über Linsen werden die Lichtstrahlen fokussiert.



Herleitung der Abbildungsgleichung einer Linse über das Brechungsgesetz:

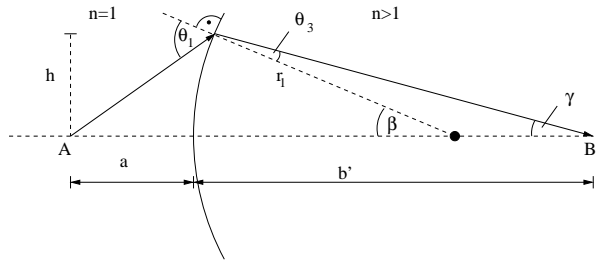
Brechung an der ersten Oberfläche: $\sin \theta_1 = n \sin \theta_3$

Für achsennahe Strahlen gilt: $\sin \theta \simeq \theta$

$$\Rightarrow \theta_1 = n \theta_3$$

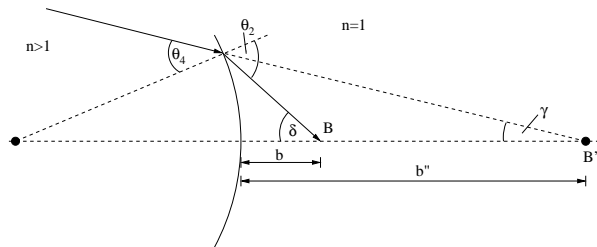
$$\theta_1 = \alpha + \beta \text{ und } \beta = \theta_3 + \gamma$$

$$\alpha = \frac{h}{a}; \beta = \frac{h}{r_1}; \gamma = \frac{h}{b'}$$



Aus $\theta_1 = n \theta_3$ folgt: $\frac{h}{a} + \frac{h}{r_1} = n \frac{h}{r_1} - n \frac{h}{b'}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{n}{b'} = (n-1) \frac{1}{r_1}$$



Für die Brechung an der zweiten Oberfläche gilt:

$$\sin \theta_2 = n \sin \theta_4$$

Für paraxiale Strahlen: $\theta_2 = n \theta_4$

$$\theta_2 = \Phi + \delta; \theta_4 = \Phi + \gamma$$

$$\Phi = \frac{k}{r_2}; \delta = \frac{k}{b}; \gamma = \frac{k}{b''}$$

Aus $\theta_2 = n \theta_4$ folgt: $\frac{k}{r_2} + \frac{k}{b} = n \frac{k}{r_2} + n \frac{k}{b''}$

$$\Rightarrow \frac{1}{b} - \frac{n}{b''} = (n-1) \frac{1}{r_2}$$

Konvention: Der Radius der zweiten Oberfläche hat ein negatives Vorzeichen, da die Krümmung entgegengesetzt zur ersten Oberfläche ist.

Zusammenfassend gilt für die Brechung an einer dünnen Linse ($b' = b''$) in paraxialer Näherung:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{f}$$

Beispiel: $a = \infty, r_1 = -r_2 = r, n = 2$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{n-1} \frac{r}{2} = \frac{r}{2}$$

$1/f$ bezeichnet man als Brechkraft. Die Einheit der

Brechkraft ist Dioptrie ($1 \text{ dpt} = 1 \text{ m}^{-1}$)

Verschiedene Linsentypen:

Sammellinsen

bikonvex: $r_1 > 0; r_2 < 0$

konvex-konkav: $r_2 > r_1 > 0$

Streulinsen

bikonkav: $r_1 < 0; r_2 > 0$

konkav-plan: $r_1 < 0; r_2 = \infty$

Versuch: Kombination von Linsen

Beobachtung: Für die Kombination von zwei Linsen gilt:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

wobei die Brennweiten für Sammellinsen ein positives und für Streulinsen ein negatives Vorzeichen haben (Herleitung analog zu Abbildungsgleichung einer dünnen Linse mit zwei gekrümmten Flächen).

Abbildungsfehler von Linsen:

Versuch: Linsenfehler für randnahe und achsenferne Strahlen

Beobachtung: Achsenferne Strahlen werden nicht im Brennpunkt fokussiert. Dies führt zu sphärischen Aberrationen (Verringerung des Effekts mit Blenden).

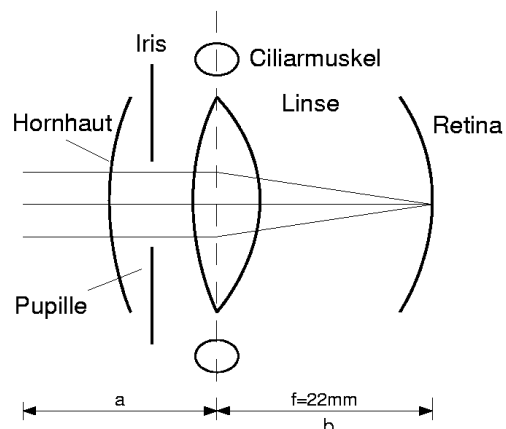
Ursache: Paraxiale Näherung bei der Herleitung der Abbildungsgleichung für sphärische Linsen.

Linsenfehler - Farbfehler

Die Abbildungen von scharfen Linien zeigen Regenbogenfarben. Dies führt zur chromatischen Aberration.

Ursache: blaues Licht wird stärker gebrochen als rotes (Abhilfe durch Kombination von Linsen mit unterschiedlichen Brechungsindex).

3.3.4 Menschliches Auge



Die Brennweite f der Augenlinse (Brechungsindex $n = 1.4$ für grünes Licht, $\lambda = 550\text{nm}$) kann mit Hilfe des Ciliarmuskels zwischen $\sim 19\text{ mm}$ und $\sim 22\text{ mm}$ verändert werden. Damit können Gegenstände im Abstand zwischen ca. 100 mm und unendlich, scharf abgebildet werden. Im Abstand $a \simeq 250\text{ mm}$ ist der Muskel in Ruhe.

Kurzichtig: Das Auge fokussiert die Lichtstrahlen so stark, dass das Bild eines weit entfernten Gegenstandes vor der Retina liegt.

Abhilfe: Brille (Streulinse mit $f < 0$). In der Regel wird aus Gründen der Gewichtersparnis ein sogenanntes Minusglas verwendet, das als Streulinse dient.

Weitsichtig: Nahe Gegenstände können nicht auf die Retina fokussiert werden (z.B. erreicht die Brennweite des Auges 19 mm nicht mehr).

Abhilfe: Brille (Sammellinse mit $f > 0$)

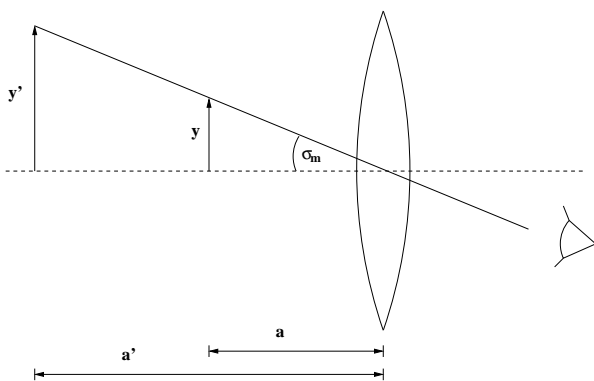
Im Ruhezustand hat das Auge eine Vergrößerung von zirka:

$$\Gamma = \frac{a}{f_{\text{Auge}}} = \frac{250\text{ mm}}{22\text{ mm}} \approx 11$$

Die Lichtsensoren auf der Retina (ca. 125 Millionen Rezeptoren) haben eine Größe von etwa $6\ \mu\text{m}$. Damit können Gegenstände, die größer sind als etwa $11 \cdot 6\ \mu\text{m} = 66\ \mu\text{m}$, wahrgenommen werden.

Um feinere Details erkennen zu können, muss der Gegenstand näher an das Auge gebracht werden. Beim Unterschreiten des Nahpunktes bei $\sim 100\text{ mm}$ kann das Auge den Gegenstand nicht mehr scharf abbilden \rightarrow Hilfsmittel wie Lupe oder Mikroskop.

Beispiel: Lupe



Mithilfe einer Sammellinse kann die Brennweite verkleinert werden.

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_{\text{Auge}}} + \frac{1}{f_{\text{Lupe}}}$$

und Gegenstände können näher am Auge scharf abgebildet werden. Gegenstand y im Abstand $a < f$

von der Lupe. Durch die Lupe erscheint im Auge ein virtuelles Bild der Größe y' unter dem Schinkel

$$\sigma_m = \frac{y'}{a'} = \frac{y}{a}$$

Die Vergrößerung Γ eines optischen Instruments ist definiert als:

$$\Gamma = \frac{\text{Größe mit Auge und Instrument}}{\text{Größe mit Auge}} = \frac{y'}{y}$$

Die Normalvergrößerung Γ_0 einer Lupe erhält man, wenn man das Bild im Unendlichen betrachtet.

\Rightarrow Der ideale Abstand Gegenstand-Lupe ist gleich der Brennweite der Lupe.

$$\Rightarrow \Gamma_0 = \frac{250\text{ mm}}{f}$$

Typische Brennweite von Linsen für Lupen:

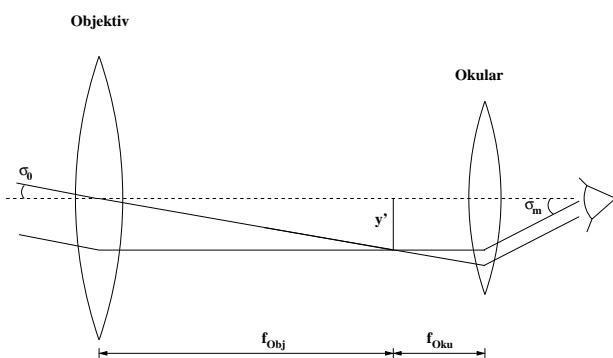
$$f = 62.5\text{ mm} \Rightarrow \Gamma_0 = 4$$

Für größere Brennweiten werden größere Durchmesser der Linsen benötigt. Nachteil: Hohes Gewicht (Vgl. Teleskop)

Beispiel 3: Fernrohr (Versuch)

Abbildung von Gegenständen, die sehr weit vom Betrachter entfernt sind. \Rightarrow Lichtstrahlen vom Objekt treffen parallel auf die Objektivlinse auf (J. Kepler 1571-1630).

Das Kepler'sche Fernrohr erzeugt mit Hilfe einer Objektivlinse ein reelles Zwischenbild das nahe am Auge mit einem Okular (ähnlich zur Lupe) vergrößert wird.



Die Vergrößerung wird erreicht durch eine Vergrößerung des Betrachtungswinkels $\sigma_0 \rightarrow \sigma_m$

$$\tan \sigma_0 = \frac{y'}{f_{\text{obj}}} \cong \sigma_0 \quad \text{und} \quad \tan \sigma_m = \frac{y'}{f_{\text{oku}}} \cong \sigma_m$$

Die Vergrößerung des Fernrohres ist dann:

$$\Gamma = \frac{\sigma_m}{\sigma_0} = \frac{f_{\text{obj}}}{f_{\text{oku}}}$$

D.h. große Vergrößerung mit einem Objektiv großer

Brennweite und einem Okular kleiner Brennweite.

Beispiel: Größtes Fernrohr (Linsenteleskop) von der University of Chicago

Objektiv mit Durchmesser 102 cm und $f = 19.5$ m
 Okular mit $f = 10$ cm ergibt eine Vergrößerung von $\Gamma = 195$

3.4 Wellenoptik

3.4.1 Interferenz

Beobachtung: Werden die Strukturen (Spaltbreite) vergleichbar mit der Wellenlänge λ des Lichts kommt es zu Interferenz- und Beugungseffekten und es treten Nebenmaxima auf. Ursache ist die Wellennatur des Lichts.

Lichtwellen sind transversale, elektromagnetische Wellen mit $\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{z}$.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(kz - \omega t - \Phi)$$

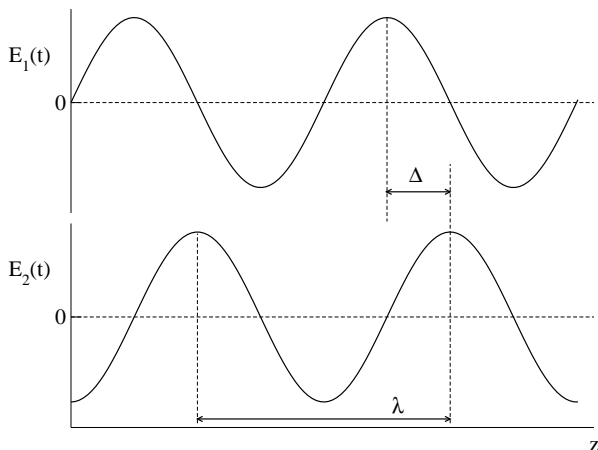
$$= \vec{E}_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct) - \Phi\right)$$

\vec{E}_0 ist die Amplitude der Schwingung des \vec{E} -Feldes. Die Wellenlänge λ gibt die Periode der Schwingung vor, c ist die Lichtgeschwindigkeit der Lichtwelle, z die Ausbreitungsrichtung und Φ ihre Phase (Wir betrachten nur \vec{E} , da \vec{B} direkt mit \vec{E} verknüpft ist und \vec{B} eine kleine Amplitude hat).

Für die Addition von Lichtwellen, gilt analog zu mechanischen Wellen das Superpositionsprinzip:

Die Gesamtamplitude des \vec{E} -Feldes am Ort P ergibt sich durch lineare, phasenrichtige Addition aller ankommenden Amplituden.

Beispiel: Zwei Lichtwellen mit $\lambda_1 = \lambda_2$ und $E_{10} = E_{20}$, deren Phase um den Gangunterschied $\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$ verschoben ist.



D.h. für die beiden Lichtwellen: Wellen gleicher Wellenlänge können sich auslöschen oder verstärken. Bei destruktiver Interferenz ist der Gangunterschied Δ aufgrund einer Phasenverschiebung $\Delta\Phi$ oder eines Weglängenunterschiedes Δs ein ungerades Vielfaches von $\lambda/2$ ($\Delta = (2m + 1)\lambda/2$ mit $m = 1, 2, 3, \dots$)

Bei konstruktiver Interferenz ist Δ ein Vielfaches von λ ($\Delta s = m\lambda$).

Voraussetzungen für Interferenz:

- Gleiche Wellenlänge
- Phasenverschiebung muss konstant bleiben. (Kohärenzlänge eines Lasers ca. 100 m bis 2 km; einer Spektrallampe ca. 20 cm bis 80 cm)

Beispiele für Interferenz:

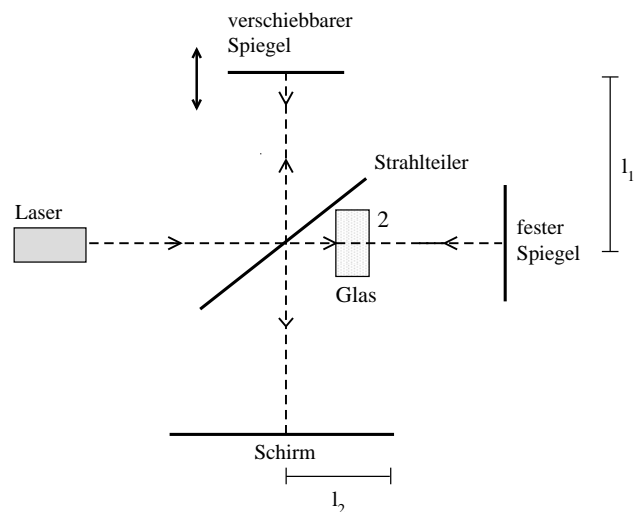
a) **Michelson-Interferometer** (A. Michelson 1832-1931)

Interferenz zweier Wellenzüge der Wellenlänge λ_0

Eine Lichtquelle emittiert kohärentes Licht mit $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(kz - \omega t - \Phi)$.

Ein halbdurchlässiger Spiegel erzeugt zwei Lichtquellen mit $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ (d.h. $\Delta\Phi = 0$) und $\omega_1 = \omega_2$ aber unterschiedlichen Laufwegen s_1 und s_2 .

Versuch: Durch Änderung der Weglänge s_2 (Änderung des Spiegelabstandes von Spiegel 2 z.B. mit einer Mikrometerschraube) ändert sich die Helligkeit am Bildschirm.



Anwendungen:

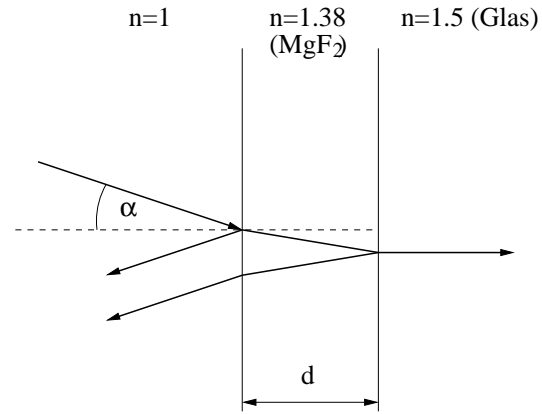
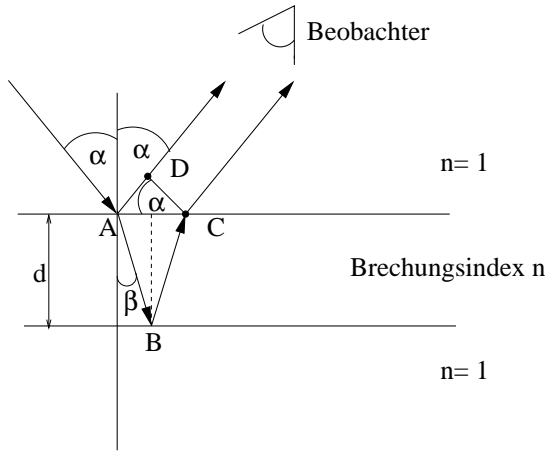
- Bestimmung der Wellenlänge
- Über die Einbringung von Materialien in einen Laufweg kann deren Brechungsindex bestimmt werden.

→ Interferenzmikroskop: Spiegel 1 ist eine glatte Fläche hoher Güte, Spiegel 2 ein Prüfling. Das Interferenzmuster zeigt Rauigkeit und Oberflächenform der Oberfläche des Prüflings (Genauigkeit: $\Delta s \simeq \lambda_0/100 \simeq 1 \text{ nm}$).

D.h. für einen Gangunterschied von $\Delta = m \lambda$ nimmt ein Beobachter Helligkeit wahr, für $\Delta = (m - \frac{1}{2}) \lambda$ keine Intensität.

Anwendung: Entspiegelung von Linsen
Versuch: Vergütete Glasplatte. Beobachtung: Reflexion nimmt bei vergüteter Glasscheibe im Vergleich deutlich ab und die Transmission nimmt zu.

b) Planparallele Platten



Fällt eine Lichtwelle unter dem Einfallswinkel α auf eine planparallele durchsichtige Platte mit dem Brechungsindex n und der Dicke d , wird ein Teil der Welle reflektiert und ein Teil gebrochen. Die gebrochene Welle wird an der unteren Grenzschicht erneut (teilweise) reflektiert und überlagert die direkt reflektierte Teilwelle.

Für kleine Einfallswinkel α (nahezu senkrechten Einfall) wird für eine Dicke $d = \frac{\lambda}{4n}$ der Gangunterschied gerade $\frac{\lambda}{2}$ (erneuter Phasensprung um $\frac{\lambda}{2}$, da die MgF_2 einen kleineren Brechungsindex hat als das Glas).
 ⇒ keine reflektierte Intensität. Die gesamte Intensität geht in den transmittierten Strahl (eine Vergütung erfolgt zumeist durch mehrere Schichten).

Dies führt zu einem Gangunterschied Δ zwischen den reflektierten Teilwellen. Zusätzlich zum Wegunterschied muss die kleinere Ausbreitungsgeschwindigkeit in der Platte berücksichtigt werden:

c) Interferenzfilter

Aufgrund von $d = \frac{\lambda}{4n}$ hängt die Intensität des reflektierten Strahls von der Wellenlänge ab. Damit kann ein Interferenzfilter realisiert werden, der z.B. grünes Licht reflektiert, während er für rotes Licht durchlässig ist (*Versuch*).

$$\Delta = n(\overline{AB} + \overline{BC}) - \overline{AD} ; \left(c_m = \frac{\lambda}{n} \right)$$

$$= \frac{2nd}{\cos \beta} - 2d \tan \beta \sin \alpha$$

d) Newton'sche Ringe

Wenn eine optisch durchlässige Schicht auf einer spiegelnden Schicht aufliegt, beobachtet man Interferenzen, wenn die Auflage nicht perfekt ist (*Versuch*).

Aus dem Brechungsgesetz $\sin \alpha = n \sin \beta$ folgt mit $\cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$:

Anwendung:

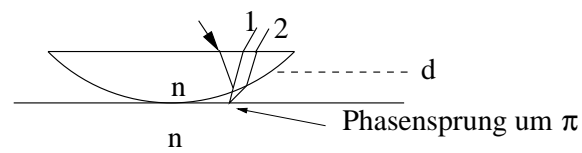
$$\Delta = \frac{2nd}{\cos \beta} - \frac{2nd \sin^2 \beta}{\cos \beta} = 2nd \cos \beta$$

$$= 2nd \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$$

$$= 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} + \frac{\lambda}{2}$$

- Überprüfung von Planschliffen (bis auf Bruchteil einer Wellenlänge)
- Überprüfung von Linsenformen

Das $\frac{\lambda}{2}$ kommt von dem "Phasensprung" um π bei Reflexion am optisch dichteren Medium (vgl. fest eingespanntes Ende einer Saite bei mech. Wellen).



e) **Farben dünner Schichten** (z.B. Ölfilme)

Bei Beleuchtung mit breitem Spektrum (natürliches Licht, Glühlampe ...) kommt es zu Interferenzbedingungen für die unterschiedlichen Wellenlängen.

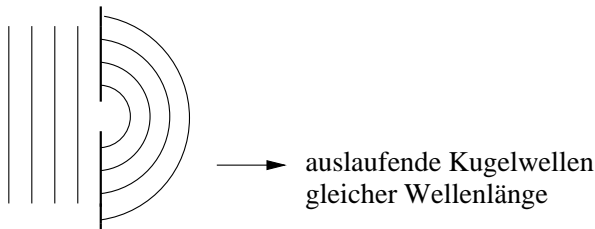
⇒ z.B. farbige Streifen, Muster

3.4.2 Beugung

Huygens'sche Prinzip (C. Huygens 1629-1695):

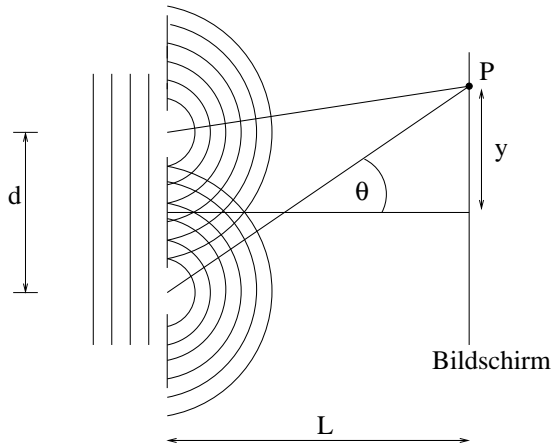
Jeder Punkt, der von einer einfallenden Welle getroffen wird, ist Ausgangspunkt einer ausfallenden Kugelwelle mit gleicher Wellenlänge.

Versuch: Wasserwellen an einer Barriere mit einer schmalen Öffnung.



Versuch: Interferenz am Doppelspalt

Beobachtung: Es treten Nebenmaxima auf, deren Abstand auf dem Bildschirm konstant ist.



Annordnung: Zwei Spalte S_1 und S_2 mit Abstand d .
Annahmen: Die Spaltbreite a ist klein gegenüber dem Spaltabstand (Punktquellen) und der Spaltabstand ist klein gegenüber dem Abstand zum Bildschirm L .

Dann gilt für den Beobachtungswinkel zum Punkt P in guter Näherung: $\theta_1 = \theta_2 = \theta$

Im Punkt P ist der Gangunterschied Δs zwischen den beiden Kugelwellen:

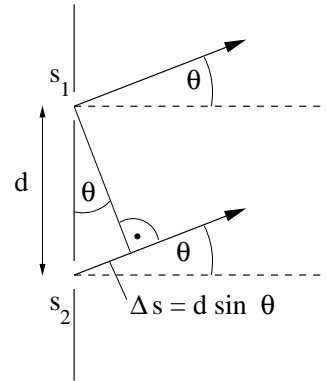
$$\Delta s = d \sin \theta$$

D.h. konstruktive Interferenz (Helligkeit) für:

$$d \sin \theta = m \lambda \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Destruktive Interferenz (Auslöschung) für:

$$d \sin \theta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$$



Für den Abstand y_m des m -ten Interferenz-Maximums am Bildschirm gilt:

$$\tan \theta = \frac{y_m}{L}$$

Für kleine Winkel: $\tan \theta \approx \sin \theta$ mit $d \sin \theta = m \lambda$

$$y_m = m \frac{\lambda L}{d}$$

⇒ Der Abstand zwischen Maxima auf dem Bildschirm ist konstant.

Intensitätsbetrachtung:

Für kleine Weglängenunterschiede gilt für die beiden Wellenzüge:

$$E_1 = A_1 \sin(\omega t)$$

$$E_2 = A_2 \sin(\omega t + \Phi)$$

wobei für die Amplituden gilt: $A_1 = A_2 = A_0$

Aus dem Superpositionsprinzip folgt für die Überlagerung der beiden Wellenzüge:

$$E = E_1 + E_2 = A_0 \sin(\omega t) + A_0 \sin(\omega t + \Phi)$$

$$E = 2 A_0 \cos\left(\frac{1}{2} \Phi\right) \sin\left(\omega t + \frac{1}{2} \Phi\right)$$

mit $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos\left(\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right) \sin\left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right)$

⇒ für die Amplitude der resultierenden Welle:

$$A = 2 A_0 \cos\left(\frac{1}{2} \Phi\right)$$

Die Intensität I ist proportional zum Quadrat der Amplitude

$$I \propto 4 A_0^2 \cos^2\left(\frac{1}{2} \Phi\right)$$

I ist maximal für: $\Phi = m 2 \pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$

I ist minimal für: $\Phi = m \pi$

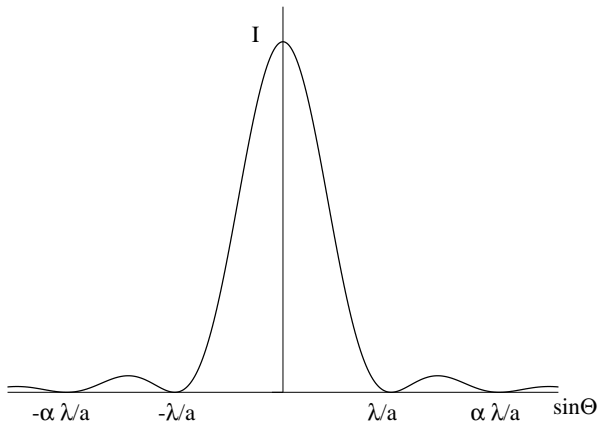
mit $\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$

gibt es ein Intensitätsmaximum bei $m 2 \pi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$

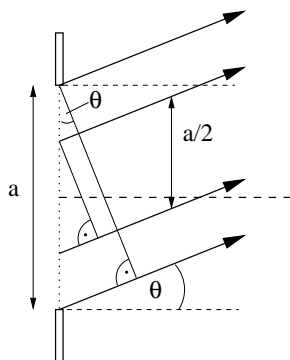
d.h. für $d \sin \theta = m \lambda$

Beugung am Einzelspalt

Versuch: Ein Laserstrahl fällt auf einen Einzelspalt der Breite $a \leq \lambda$. Beobachtung: Neben einem breiten Intensitätsmaximum in Vorwärtsrichtung treten weniger intensive Nebenmaxima auf.



Das erste Minimum liegt bei $\sin \theta = \lambda/a$ also wenn für den Weglängenunterschied zweier Wellenzüge die den Spalt an seinen beiden Enden verlassen gilt: $a \sin \theta = \lambda$ (vgl. Interferenz am Doppelspalt: Erstes Maximum bei $d \sin \theta = \lambda$)



Erklärung: Ist jeder Punkt entlang des Spaltes ein Ausgangspunkt einer Kugelwelle (Huygens'sches Prinzip) kommt es zwischen jeweils zwei Wellenzügen, die ihren Ursprung im Abstand von $a/2$ am Spalt haben, zu destruktiver Interferenz (Zu jedem Wellenzug aus der einen Hälfte des Spaltes gibt es genau einen aus der unteren Hälfte mit dem Wegunterschied $\Delta s = \lambda/2 = a/2 \sin \theta$).

Für den Abstand y_{\min} vom zentralen Maximum zum ersten Minimum auf einem Bildschirm in Abstand L zum Spalt mit Breite a gilt:

$\tan \theta = y_{\min}/L$

Für kleine Winkel: $\tan \theta \simeq \sin \theta$ mit $a \sin \theta = \lambda$:

$y_{\min} = \frac{L\lambda}{a}$

D.h. über Messung der Winkel kann die Wellenlänge oder die Spaltbreite präzise bestimmt werden.

Versuch: Beugung an verschiedenen Objekten (z.B. dünner Draht, Loch $0.3 \mu\text{m}$, Dreiecksloch...)

Beobachtung: Aus dem Beugungsbild kann die Größe und Form von kleinen Objekten sehr genau bestimmt werden.

Auflösungsvermögen

Die erreichbare räumliche Auflösung ist durch Beugung begrenzt: Zwei Punktquellen können unterschieden (aufgelöst) werden, wenn deren Beugungsscheiben (vgl. Beugung am Loch) soweit getrennt sind, dass das Maximum 0ter Ordnung des ersten Objektes in das erste Minimum des zweiten Objektes fällt (Kriterium nach Rayleigh).

Versuch: Beugung an einer Lochblende mit Durchmesser D . Für die Position des ersten Minimums gilt bis auf einen geometrischen Faktor (vgl. Beugung an verschiedenen Objekten):

$\sin \theta_{\min} \simeq \lambda/D$ (analog zum Einzelspalt)

Für kleine Winkel: $\theta_{\min} \approx \lambda/D$

\Rightarrow Das Auflösungsvermögen ist umso größer je kleiner die Wellenlänge λ ist und je größer der Blendendurchmesser D ist.

Typischerweise können Auflösungen in der Größenordnung der halben Wellenlänge erreicht werden. Für Lichtwellen etwa $0.3 \mu\text{m}$

Für bessere Auflösung: Wellen mit kürzerer Wellenlänge (z.B. Röntgenstrahlung für die Untersuchung der Struktur kondensierter Materie).

3.4.3 Teilchenstrahlen

Die spezielle Relativitätstheorie zeigt, dass Energie E und Masse m äquivalent sind. Es gilt:

$E = m c^2$

Da sich Lichtquanten (Photonen) mit Lichtgeschwindigkeit c ausbreiten, kann man Ihnen die Masse:

$m = \frac{h f}{c^2}$

und den Impuls:

$p = m c = \frac{h f}{c} = \frac{h}{\lambda}$

zuordnen. Umgekehrt kann einem Teilchen, z.B. Elektron oder Neutron, über seinen Impuls p eine Wellenlänge $\lambda_t = h/p$ zugeordnet werden. Diesen Zusammenhang bezeichnet man als **Welle-Teilchen Dualismus**.

Allgemein gilt für den relativistischen Impuls eines Teilchens:

$$\vec{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \vec{v}$$

Dabei ist m_0 die Ruhemasse des Teilchens. Ist die Geschwindigkeit v der Teilchen klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit, ergibt sich für die Wellenlänge λ_t des Teilchens die de Broglie Wellenlänge:

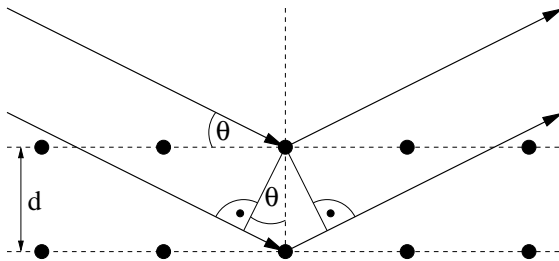
$$\lambda_t = \frac{h}{m_0 v}$$

Beispiel: Ein Neutron fliegt mit der Geschwindigkeit $v_0 = 1800 \text{ m/s}$ (thermische Neutronen). Für seine Wellenlänge ergibt sich dann:

$$\lambda_n = \frac{h}{m_n v_0} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}}{1.675 \cdot 10^{-27} \text{ kg } 1800 \text{ m/s}} \approx 2 \text{ \AA}$$

D.h. Neutronen sind geeignet die Struktur der Materie auf atomarer Ebene aufzulösen, da Atome in kondensierter Materie typischerweise Abstände von einigen Angström ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$) haben.

Beispiel: Bragg Reflexion an einem Si Kristall.



Ist der Gangunterschied zwischen reflektierten Teilwellen ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge kommt es zu konstruktiver Interferenz.

$$2 d \sin \theta = i \lambda \quad i = 1, 2, 3 \dots$$

D.h. für eine gegebene Wellenlänge λ , ergibt sich unter einem Streuwinkel von 2θ Intensität (Bragg Reflex) wenn es in der Probe einen Netzebenenabstand:

$$d = \frac{i \lambda}{2 \sin \theta} \text{ gibt (Bragg Bedingung).}$$

Literatur

Lehrbücher

- P. A. Tipler, G. Mosca, *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure*, Spektrum Akademischer Verlag 2004 (ca. 1500 Seiten)
- W. Demtröder, *Experimentalphysik 1 – Mechanik und Wärme* Springer 2003 und *Experimentalphysik 2 – Elektrizität und Optik* Springer 2004 (je ca. 500 Seiten)
- K. Lüders und R. O. Pohl, *Pohls Einführung in die Physik – Mechanik, Akustik und Wärmelehre*, Springer 2004 und *Elektrizität und Optik* Springer 2005 (je ca. 350 Seiten)

Formel- und Tabellensammlungen

- H. Kuchling, *Taschenbuch der Physik*, Hanser Fachbuchverlag 2004 (ca. 700 Seiten)
- H. Stöcker, *Taschenbuch der Physik*, Verlag Harri Deutsch 2004 (ca. 1000 Seiten)

Weitere Literatur

- H. Schulz, *Physik mit Bleistift*, Verlag Harri Deutsch 2004 (ca. 400 Seiten)
- T. Dorfmueller, W. Hering, K. Stierstadt, *Bergmann–Schäfer: Lehrbuch der Experimentalphysik*, de Gruyter 1998 (1 Band pro Semester, je ca. 900 Seiten)
- D. Meschede, *Gerthsen Physik*, Springer 2004 (ca. 1150 Seiten)
- H. Daniel, *Physik 1 – Mechanik, Wellen und Wärme*, de Gruyter 1997 (400 Seiten)
- K. Dransfeld, P. Kienle, G. M. Kalvius, *Physik I – Mechanik und Wärme*, Oldenbourg 2000 (ca. 400 Seiten)