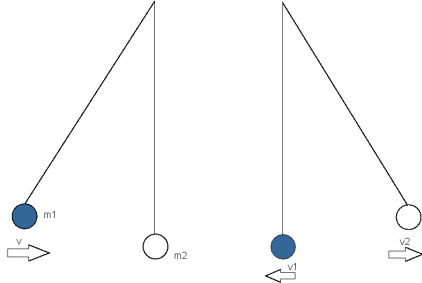


Übungen zu Physik 1 für Ingenieure – Musterlösung Blatt 4

Aufgabe 1 – Energie- und Impulserhaltung bei elastischen Stoß



Zuerst wird der allgemeine Fall des elastischen Stoß zweier Kugeln mit Masse m_1 und m_2 betrachtet. Es gilt:

$$\frac{1}{2}m_1v^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad \text{Energieerhaltung} \quad (1)$$

$$m_1v = m_1v_1 + m_2v_2 \quad \text{Impulserhaltung} \quad (2)$$

wobei die erste Kugel vor dem Stoß ruhte.

Um die Geschwindigkeiten nach dem Stoß in Abhängigkeit

von v zu erhalten, löst man Gleichung (2) nach v_1 bzw. v_2 auf und setzt in Gleichung (1) ein.

Aus Gleichung (2) folgt: $v_1 = \frac{m_1v - m_2v_2}{m_1} = v - \frac{m_2}{m_1}v_2$,

eingesetzt in (1) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1v^2 &= \frac{1}{2}m_1 \left(v - \frac{m_2}{m_1}v_2 \right)^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{2}m_1v^2 &= \frac{1}{2}m_1 \left[v^2 - 2\frac{m_2}{m_1}v_2v + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 v_2^2 \right] + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \\ \Rightarrow m_2v_2v &= \frac{1}{2}\frac{m_2^2}{m_1}v_2^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \\ \Rightarrow v_2v &= v_2^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m_1}{m_2} + 1 \right) \right] \\ \Rightarrow v_2 &= \frac{2v}{\frac{m_2}{m_1} + 1} \\ \Rightarrow v_2 &= \frac{2v}{\frac{m_2}{m_1} + 1} \end{aligned}$$

setzt man diesen Ausdruck für v_2 in Gleichung (2) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} m_1v &= m_1v + m_2 \left(\frac{2v}{\frac{m_2}{m_1} + 1} \right) \\ \Rightarrow m_1v_1 &= m_1v - 2vm_2 \frac{m_1}{m_2 + m_1} \\ \Rightarrow v_1 &= v \left(1 - \frac{2vm_2}{m_2 + m_1} \right) \\ \Rightarrow v_1 &= v \left(\frac{m_2 + m_1 - 2m_2}{m_2 + m_1} \right) \\ \Rightarrow v_1 &= v \left(\frac{m_1 - m_2}{m_2 + m_1} \right) \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$v_1 = v \frac{m_1 - m_2}{m_2 + m_1} \quad (3)$$

$$v_2 = \frac{2v}{\frac{m_2}{m_1} + 1} \quad (4)$$

Es ist zu beachten, dass

$$\begin{aligned}v_1 &= v \\v_2 &= 0\end{aligned}$$

ebenfalls eine Lösung für Gleichung (1) und (2) darstellt. Diese ist allerdings unphysikalisch, da die erste Kugel die ruhende zweite durchdrungen hätte.

(a) Mit $m_1 = m_2 = m$ ist dies ein Spezialfall des allgemeinen Falles und eingesetzt in Gleichung (3) und (4) erhält man:

$$\begin{aligned}v_1 &= 0 \\v_2 &= v\end{aligned}$$

(b) Zuerst wird der allgemeine Fall eines elastischen Stoßes dreier Kugeln mit Masse m_1 , m_2 und m_3 betrachtet. Analog zum Aufgabenteil (a) erhält man

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m_1v^2 &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 \\m_1v &= m_1v_1 + m_2v_2 + m_3v_3\end{aligned}$$

Mit zwei Gleichungen für drei Unbekannte lässt sich dieses Gleichungssystem für v_1 , v_2 und v_3 nicht eindeutig lösen. Man zerlegt das Problem daher in eine Abfolge von Zweikörperproblemen. Zuerst treffe die erste Kugel mit Masse m_1 und Geschwindigkeit v auf die ruhende zweite Kugel mit Masse m_2 . Nach dem ersten Stoß haben die Kugeln die Geschwindigkeiten

$$v_1 = v \frac{m_1 - m_2}{m_2 + m_1} \quad (5)$$

$$v_2 = \frac{2v}{\frac{m_2}{m_1} + 1} \quad (6)$$

Unmittelbar im Anschluss trifft die zweite Kugel mit der Geschwindigkeit v_2 auf die noch ruhende dritte Kugel. Wenn man die Geschwindigkeiten nach diesem zweiten Stoß als w_1 für die zweite und w_2 für die dritte Kugel bezeichnet, so ergibt sich ebenfalls nach Aufgabenteil (a):

$$w_1 = v_2 \frac{m_1 - m_2}{m_2 + m_1} \quad (7)$$

$$w_2 = \frac{2v_2}{\frac{m_2}{m_1} + 1} \quad (8)$$

Setzt man v_2 aus Gl. (6) in diesen Ausdruck ein, so erhält man:

$$w_1 = \frac{2v}{\frac{m_2}{m_1}} \left(\frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} \right) \quad (9)$$

$$w_2 = \frac{4v}{\left(\frac{m_2}{m_1} + 1 \right) \left(\frac{m_3}{m_2} + 1 \right)} \quad (10)$$

Aufgabenteil (b) ist ein Spezialfall dieses allgemeinen Falles mit $m_1 = m_2 = m_3$. Damit besitzen drei gleiche Kugeln nach einem Stoß die Geschwindigkeiten:

$$\begin{aligned}v_1 &= 0 \\w_1 &= 0 \\w_2 &= v\end{aligned}$$

Die Bewegung der beiden äußeren Kugeln gleicht der Bewegung zweier Kugeln, wobei die mittlere Kugel stets in Ruhe bleibt.

(c) Wieder zerlegt man das Problem in zwei Zweikörperprobleme. Zuerst trifft die 2. Kugel mit Geschwindigkeit v auf die ruhende dritte Kugel. Wie in (a) ergeben sich folgende Geschwindigkeiten (v_1 für Kugel 2 und v_2 für Kugel 3) nach dem Stoß.

$$\begin{aligned}v_1 &= 0 \\v_2 &= v\end{aligned}$$

Unmittelbar im Anschluß trifft Kugel 1 mit der Geschwindigkeit v auf die jetzt ruhende 2. Kugel. Aus (a) folgen die Geschwindigkeiten

$$\begin{aligned}w_1 &= 0 \\w_2 &= v\end{aligned}$$

für Kugel 1 bzw. Kugel 2.

Es bewegen sich also immer zwei Kugeln mit der Geschwindigkeit v und eine Kugel ruht.

(d) Es handelt sich um einen Spezialfall der Gleichungen (3) und (4) mit $\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{4}$. Dieses Massenverhältnis in (3) und (4) eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned}v_1 &= \frac{-3}{5}v \\v_2 &= \frac{2}{5}v\end{aligned}$$

Die Bewegung eines mathematischen Pendels hängt nicht von der Masse ab, die Kugeln treffen sich in der Mitte. Nach dem zweiten Stoß ruht die 2. Kugel, es handelt sich um eine periodische Bewegung.

(e) Setzt man $m_1 = m_2 = \frac{1}{4}m_3$ in Gleichung (5) (9) und (10) ein, so ergeben sich die gesuchten Geschwindigkeiten zu

$$\begin{aligned}v_1 &= 0 \\w_1 &= \frac{-3}{5}v \\w_2 &= \frac{2}{5}v\end{aligned}$$

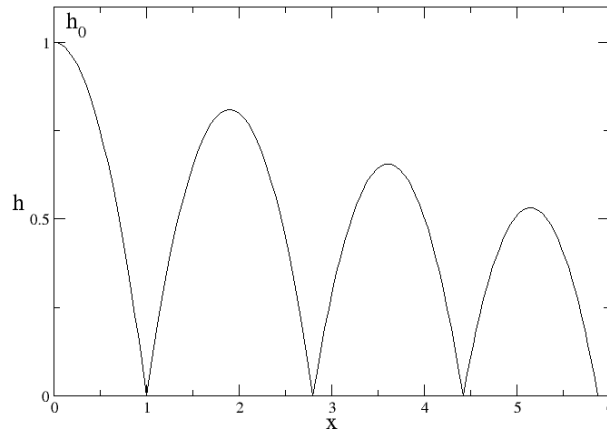
Aufgabe 2 – Energieverlust beim inelastischen Stoß

(a) Die Geschwindigkeit beim ersten Auftreffen v_0 wird mit Hilfe des Energiesatzes bestimmt:

$$\begin{aligned}mgh &= \frac{1}{2}mv_0^2 \\ \Rightarrow v_0 &= \sqrt{2gh}\end{aligned}$$

Die Werte eingesetzt ergeben $v_0 = 4.42 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Die Zeit t_0 des Falles bis zum Auftreffen am Boden ist $t_0 = \frac{v_0}{g} = 0.45\text{s}$. Bei jedem Auftreffen des Balles auf den Boden gehen 10% der Geschwindigkeit verloren. Nach n Stößen sind von der Anfangsgeschwindigkeit v_0 noch $0.9^n v_0$ übrig. Für die kinetische Energie $E_{kin,n}$ nach n Stößen bedeutet das, $E_{kin,n} = \frac{1}{2}m(0.9^n v_0)^2 = \frac{1}{2}m0.81^n v^2$. Für die Höhe h_n nach n Bodenkontakten gilt $h_n = \frac{1}{2} \frac{v_0^{2n}}{g}$. Der Aufstieg zum zweiten Umkehrpunkt dauert $t_1 = t_0 + 0.9t_0$ so dass der Ball nach $t_2 = t_0 + 2t_0$ den Boden erreicht.

(b)



(c) Der Ball ruht, wenn er keine kin. Energie mehr besitzt, also $E_{kin} = 0$. Nach Aufg. 2a geschieht dies nach $n \rightarrow \infty$ Aufprällen.

Bis zum n -ten Auftreffen des Balles auf den Boden vergeht die Zeit $T_n = t_0 + \sum_{n=1}^n 0.9^n t_0 2$. Die in diesem Ausdruck auftretende Reihe $\sum_{k=0}^{k=n} x^k$ wird geometrische Reihe genannt und konvergiert für $|x| < 1$ und $n \rightarrow \infty$ gegen den Wert $\frac{1}{1-x}$. Die Zeit T bis der Ball zur Ruhe kommt ist daher endlich mit

$$\begin{aligned} T &= t_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 * 0.9^n t_0 \\ &= -t_0 + \sum_{n=0}^{\infty} 2 * 0.9^n t_0 \\ &= -t_0 + \frac{2 * t_0}{1 - 0.9} \end{aligned}$$

Mit den Werten aus (a) folgt $T = 8.55\text{s}$