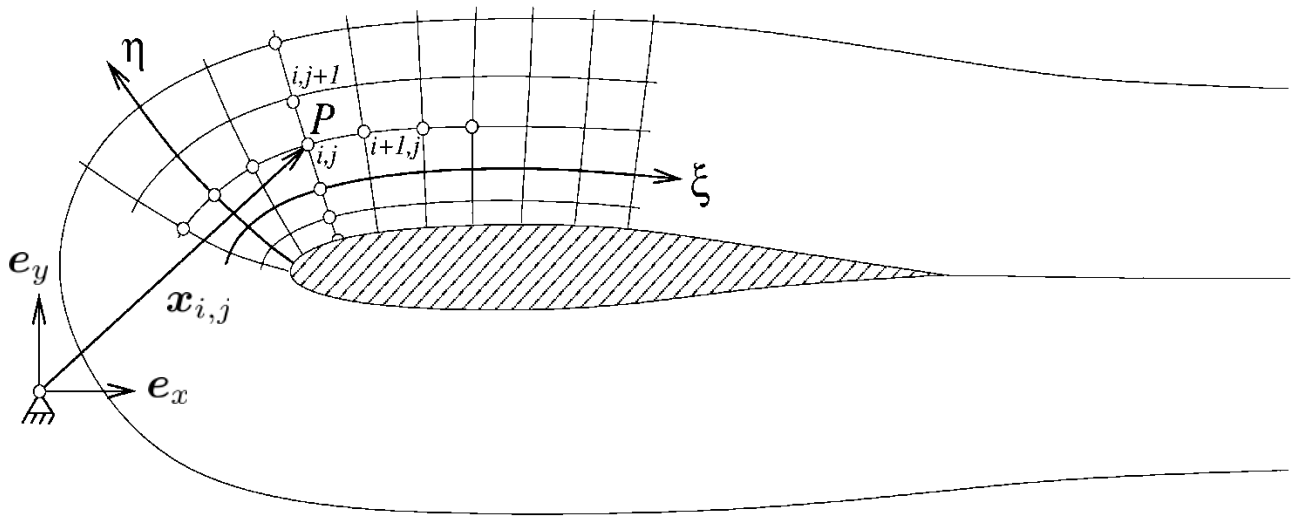


Finite Differenzen auf nicht-cartesischen Gittern

Meistens wird auf gekrümmten, sog. „körperangepassten“ (engl. „body-fitted“) Rechengittern gearbeitet, siehe Skizze:



Die Punkte P des Rechengitters werden durch die Koordinaten $x_{i,j}, y_{i,j}$ beschrieben. Das zugeordnete ξ, η -System ist so definiert, dass seine Koordinatenlinien mit den Gitterlinien (Verbindungslinien zwischen den Punkten) zusammen fallen. Hierin sind die Punkte P mit $\xi = i, \eta = j$ beschrieben; damit ist die Schrittweite im ξ, η -System normiert: $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$.

Das Differenzenschema (300) wird dann in ξ und η verwendet, d.h. es wird numerisch nach ξ bzw. η abgeleitet. Zum eigentlich benötigten Gradienten gelangt man über die Metrik M der Koordinatentransformation zwischen (x, y) und (ξ, η) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix}}_{=: M \text{ (Metrik, d.h. K.O.-Trafo } x \rightarrow \eta)} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (308)$$

Die Bestimmung der Metrik muss in der Regel ebenfalls numerisch vorgenommen werden, und zwar mit einem Verfahren von mindestens gleicher Ordnung wie die des Verfahrens, mit dem die Ableitungen nach ξ und η erfolgen. Eine sinnvolle Wahl ist es, hierfür das selbe Verfahren einzusetzen.

Beachte zunächst:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{N}} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (309)$$

Der Vergleich mit (304) ergibt

$$\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1} \quad (310)$$

d.h. zuerst wird numerisch an jedem Punkt P die Matrix \mathbf{N} gebildet und dann zu \mathbf{M} invertiert, z.B.:

$$(N_{12})_{i,j} = \frac{\partial y}{\partial \xi} \Big|_{i,j} \underset{\uparrow}{\simeq} \sum_{k=-N}^N c_k y_{i+k,j} \quad (300)$$

Für die Dichtegleichung (54) ergibt sich damit nach Einsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho'_{i,j}}{dt} = & - \sum_{k=-N}^N c_k \left\{ (u_{i,j}^0 M_{11} + v_{i,j}^0 M_{21}) \rho'_{i+k,j} + (u_{i,j}^0 M_{12} + v_{i,j}^0 M_{22}) \rho'_{i,j+k} + \right. \\ & + (u_{i+k,j}^0 M_{11} + v_{i+k,j}^0 M_{21} + u_{i,j+k}^0 M_{12} + v_{i,j+k}^0 M_{22}) \rho'_{i,j} + \\ & + \rho_{i,j}^0 (M_{11} u'_{i+k,j} + M_{12} u'_{i,j+k}) + (\rho_{i+k,j}^0 M_{11} + \rho_{i,j+k}^0 M_{12}) u'_{i,j} + \\ & \left. + \rho_{i,j}^0 (M_{21} v'_{i+k,j} + M_{22} v'_{i,j+k}) + (\rho_{i+k,j}^0 M_{21} + \rho_{i,j+k}^0 M_{22}) v'_{i,j} \right\} \quad (311) \end{aligned}$$

wobei $M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22}$ jeweils an der Stelle (i, j) genommen werden.

Für die Impulsgleichung (55) analog:

$$\begin{aligned}
 \frac{du'_{i,j}}{dt} = & - \sum_{k=-N}^N c_k \left\{ \left((u_{i,j}^0 M_{11} + v_{i,j}^0 M_{21}) u_{i+k,j}^0 + (u_{i,j}^0 M_{12} + v_{i,j}^0 M_{22}) u_{i,j+k}^0 \right) \frac{\rho'_{i,j}}{\rho_{i,j}^0} + \right. \\
 & + (u_{i,j}^0 M_{11} + v_{i,j}^0 M_{21}) u'_{i+k,j} + (u_{i,j}^0 M_{12} + v_{i,j}^0 M_{22}) u'_{i,j+k} + \\
 & + (u_{i+k,j}^0 M_{11} + u_{i,j+k}^0 M_{12}) u'_{i,j} + (u_{i+k,j}^0 M_{21} + u_{i,j+k}^0 M_{22}) v'_{i,j} + \\
 & \left. + (\rho_{i,j}^0)^{-1} (M_{11} p'_{i+k,j} + M_{12} p'_{i,j+k}) \right\}
 \end{aligned} \tag{312}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dv'_{i,j}}{dt} = & - \sum_{k=-N}^N c_k \left\{ \left((u_{i,j}^0 M_{11} + v_{i,j}^0 M_{21}) v_{i+k,j}^0 + (u_{i,j}^0 M_{12} + v_{i,j}^0 M_{22}) v_{i,j+k}^0 \right) \frac{\rho'_{i,j}}{\rho_{i,j}^0} + \right. \\
 & + (u_{i,j}^0 M_{11} + v_{i,j}^0 M_{21}) v'_{i+k,j} + (u_{i,j}^0 M_{12} + v_{i,j}^0 M_{22}) v'_{i,j+k} + \\
 & + (v_{i+k,j}^0 M_{11} + v_{i,j+k}^0 M_{12}) u'_{i,j} + (v_{i+k,j}^0 M_{21} + v_{i,j+k}^0 M_{22}) v'_{i,j} + \\
 & \left. + (\rho_{i,j}^0)^{-1} (M_{21} p'_{i+k,j} + M_{22} p'_{i,j+k}) \right\}
 \end{aligned}$$

und für die Druckgleichung (57) entsprechend:

$$\begin{aligned}
 \frac{dp'_{i,j}}{dt} = & - \sum_{k=-N}^N c_k \left\{ (u_{i,j}^0 M_{11} + v_{i,j}^0 M_{21}) p'_{i+k,j} + (u_{i,j}^0 M_{12} + v_{i,j}^0 M_{22}) p'_{i,j+k} + \right. \\
 & + \gamma (u_{i+k,j}^0 M_{11} + v_{i+k,j}^0 M_{21} + u_{i,j+k}^0 M_{12} + v_{i,j+k}^0 M_{22}) p'_{i,j} + \\
 & + \gamma p_{i,j}^0 (M_{11} u'_{i+k,j} + M_{12} u'_{i,j+k}) + (p_{i+k,j}^0 M_{11} + p_{i,j+k}^0 M_{12}) u'_{i,j} + \\
 & \left. + \gamma p_{i,j}^0 (M_{21} v'_{i+k,j} + M_{22} v'_{i,j+k}) + (p_{i+k,j}^0 M_{21} + p_{i,j+k}^0 M_{22}) v'_{i,j} \right\}
 \end{aligned} \tag{313}$$

Gleichungen (311), (312), (313) stellen ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem in t dar. Es kann für alle inneren Punkte des Gebiets angeschrieben werden. Das sind die Punkte, an denen sich der vollständige Differenzenstern bilden lässt, d.h. dort, wo mindestens noch 3 Nachbarpunkte (DRP Verfahren) zu allen Seiten vorhanden sind. Ist die Gesamtzahl der Punkte bestimmt durch $0 \leq i \leq N_\xi$ und $0 \leq j \leq N_\eta$ dann ist das System also für den Bereich von Punkten i, j mit $3 \leq i \leq N_\xi - 3$ und $3 \leq j \leq N_\eta - 3$ gültig. Punkte in Randnähe erfordern eine Sonderbehandlung (siehe 1.2.2.2, 1.2.2.3).

Zur Bildung der Ableitungen nach η auf den Gitterlinien $\eta = j = 0$ (Wand), $\eta = j = 1$ (Wandnachbarlinie) und $\eta = j = 2$ stehen keine Funktionswerte für den vollständigen Differenzenstern nach (300) $\sum_{k=-3}^3 c_k f_{i,j+k}$ zur Verfügung. Daher werden hier unsymmetrische Differenzensterne eingesetzt:

$$j = 0 : \quad \left. \frac{\partial f}{\partial \eta} \right|_{i,j=0} \simeq \sum_{k=0}^6 c_k^0 f_k \quad (314)$$

$$j = 1 : \quad \left. \frac{\partial f}{\partial \eta} \right|_{i,j=1} \simeq \sum_{k=-1}^5 c_k^1 f_k \quad (315)$$

$$j = 2 : \quad \left. \frac{\partial f}{\partial \eta} \right|_{i,j=2} \simeq \sum_{k=-2}^4 c_k^2 f_k \quad (316)$$

Der Taylorabgleich bis Ordnung 4 und spektrale Optimierung liefert nach Tam und Dong analog wie bei der Herleitung von (307) die folgenden Koeffizienten:

$c_0^0 = -2.192280339$	$c_{-1}^1 = -0.209337622$	$c_{-2}^2 = 0.049041958$
$c_1^0 = 4.748611401$	$c_0^1 = -1.084875676$	$c_{-1}^2 = -0.46884037$
$c_2^0 = -5.108851915$	$c_1^1 = 2.147776050$	$c_0^2 = -0.474760914$
$c_3^0 = 4.461567104$	$c_2^1 = -1.388928322$	$c_1^2 = 1.273274737$
$c_4^0 = -2.833498741$	$c_3^1 = 0.768949766$	$c_2^2 = -0.518484526$
$c_5^0 = 1.128328861$	$c_4^1 = -0.281814650$	$c_3^2 = 0.166138533$
$c_6^0 = -0.203876371$	$c_5^1 = 0.048230454$	$c_4^2 = -0.026369431$

Gleichungssystem (311), (312), (313) wird mit einem numerischen Verfahren in der Zeit integriert, typischerweise mit einem Runge-Kutta Verfahren (besser dispersionsarmen Varianten vgl. F.Q. Hu et al. 1996, Journal of Computational Physics) mindestens 4. Ordnung (angepasst an räumliche Ordnung).

1.2.2.2 Randbedingungen an Objektoberflächen

An harten Wandoberflächen ist die kinematische Strömungsbedingung zu erfüllen, d.h. an allen Punkten i,j auf der Wand hat zu jedem Zeitpunkt

$$\mathbf{n}_{i,j} \cdot \mathbf{v}'_{i,j} = (v'_n)_{i,j} = 0 \quad (317)$$

zu gelten, wobei $\mathbf{n}_{i,j}$ den Normalenvektor auf dem betrachteten Wandpunkt bezeichnet. Für einen Rand $\eta = \text{const}$ ist $\mathbf{n} = \nabla \eta = {}^t(M_{12}, M_{22})$, während für einen Rand $\xi = \text{const}$ $\mathbf{n} = \nabla \xi = {}^t(M_{11}, M_{21})$

Beachte:

Auf den Wandpunkten werden jetzt insgesamt 3 Gleichungen für $u'_{i,j}$ und $v'_{i,j}$ gefordert, nämlich (312) und (317), d.h. die Differentialgleichung und die Randbedingung. Dieses unterscheidet die diskretisierte (finite Differenzen-) Formulierung des Problems von der ursprünglichen.

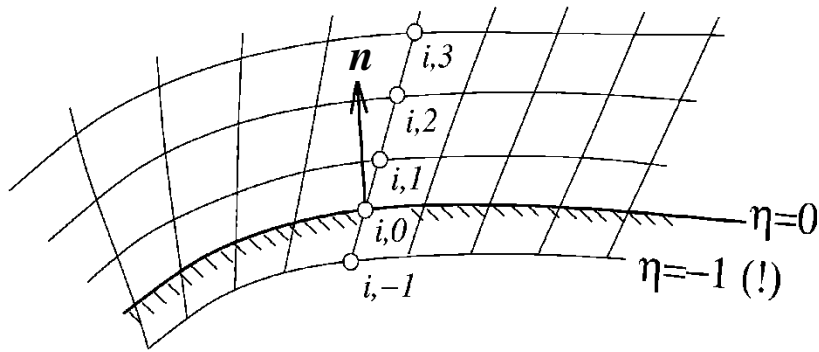
Daher:

Zur Behebung der Mehrdeutigkeit des diskreten Systems wird zunächst (a) die Bedingung (317) in eine Randbedingung für die Normalenableitung des Drucks an der Wand übersetzt. Skalar-Multiplikation von (312) mit $\mathbf{n}_{i,j}$ ergibt

$$\rho^0 \underbrace{\left(\frac{\partial v'_n}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot [\mathbf{v}^0 \cdot \nabla \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}^0] \right)}_{= 0} + \rho' \mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}^0 \cdot \nabla \mathbf{v}^0) + \frac{\partial p'}{\partial n} = 0$$

$$\frac{\partial p'}{\partial n} \Big|_{i,j} = -\mathbf{n}_{i,j} \cdot [\rho^0 (\mathbf{v}^0 \cdot \nabla \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}^0) + \rho' \mathbf{v}^0 \cdot \nabla \mathbf{v}^0]_{i,j} \quad (318)$$

Danach wird (b) eine Schicht von „Geisterknoten“ unterhalb der Wand eingeführt (siehe Bild) auf denen der „Geisterwert“ des Drucks $p'_{i,j=-1}$ so spezifiziert wird, dass (316) erfüllt ist. Dieses ist so vorstellbar, dass die Drücke in der Geisterschicht Kräfte so aufbringen, dass die Normalengeschwindigkeit an der Wand auf Null abgebremst wird.



Diese Spezifikation erfolgt numerisch aus der Darstellung der Normalenableitung an der Wand:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial n} \Big|_{i,j=0} &= \left(n_x \frac{\partial p'}{\partial x} \right)_{i,j=0} + \left(n_y \frac{\partial p'}{\partial y} \right)_{i,j=0} = (n_x M_{11} + n_y M_{21})_{i,j=0} \sum_{k=-3}^3 c_k p'_{i+k,0} \\ &+ (n_x M_{12} + n_y M_{22})_{i,j=0} \sum_{k=-1}^5 c_k^1 p'_{i,k} \end{aligned}$$

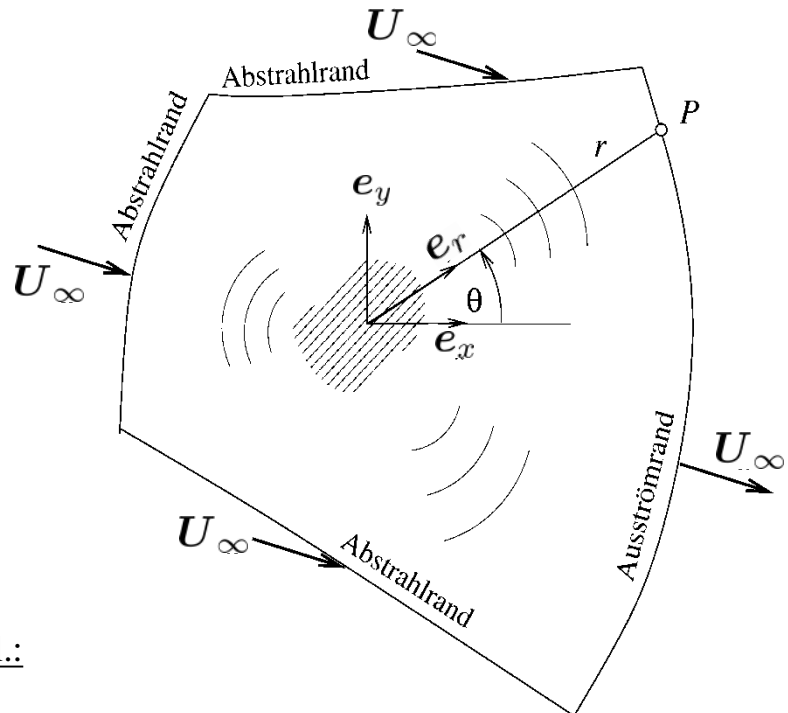
Hieraus lässt sich der Wert für $p'_{i,j=-1}$ bestimmen:

$$p'_{i,-1} = \frac{1}{(n_x M_{12} + n_y M_{22})_{i,0}} \left[\frac{\partial p'}{\partial n} \Big|_{i,j=0} - (n_x M_{11} + n_y M_{21})_{i,j=0} \sum_{k=-3}^3 c_k p'_{i+k,0} \right] - \sum_{k=0}^5 c_k^1 p'_{i,k} \quad (318) \quad (319)$$

Die Bildung der η -Ableitung von p' an $(i, j = 0)$ und $(i, j = 1)$ erfolgt unter Verwendung des Geisterwertes an $(i, j = -1)$. Für $j \geq 2$ wird wieder der zentrale Differenzenstern mit Koeffizienten c_k verwendet. Damit ist die Randbedingung an der Wand erfüllt.

1.2.2.3 Abstrahl- und Ausströmrandbedingungen

Am künstlichen Freifeldrand (Außenrand des vernetzten Rechengebiets) sollen Schallwellen, die im Inneren des Gebiets generiert werden, möglichst reflexionsfrei aus dem Rechengebiet austreten können. Andererseits sollen aber auch konvektierende Störungen wie Entropie- und Wirbelstörungen so aus dem Gebiet austreten, dass keine künstlichen, in das Gebiet zurücklaufenden Störungen entstehen (Skizze).



Freifeldbedingungen nach Tam et al.:

Zunächst eine Vorüberlegung zum Aussehen der Lösung weit weg vom Quellgebiet: Am Außenrand sei das Strömungsfeld nahezu gleichförmig $\mathbf{v}^0 \simeq \mathbf{U}_\infty = {}^t(u_\infty, v_\infty)$. Dort seien auch Dichte $\rho^0 \simeq \rho_\infty$ und Druck $p^0 \simeq p_\infty$ konstant. Wird diese Grundströmung in (55), (56), (57) eingesetzt, so entsteht ein lineares Gleichungssystem mit konstanten Koeffizienten, das durch Exponentialansatz gelöst werden kann:

$$\begin{bmatrix} \rho' \\ \mathbf{v}' \\ p' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{\mathbf{v}} \\ \hat{p} \end{bmatrix} \exp(\underbrace{i\omega t - i\alpha x - i\beta y}_{=: -i\psi})$$

Einsetzen ergibt das Eigenwertproblem

$$\left\{ \omega \mathbf{I} - \begin{bmatrix} \alpha u_\infty + \beta v_\infty & \alpha \rho_\infty & \beta \rho_\infty & 0 \\ 0 & \alpha u_\infty + \beta v_\infty & 0 & \alpha \rho_\infty^{-1} \\ 0 & 0 & \alpha u_\infty + \beta v_\infty & \beta \rho_\infty^{-1} \\ 0 & \alpha \gamma p_\infty & \beta \gamma p_\infty & \alpha u_\infty + \beta v_\infty \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{\mathbf{v}} \\ \hat{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Eigenwerte und Eigenvektoren dieses Systems sind

$$\omega_e = \begin{pmatrix} u_\infty \\ v_\infty \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \omega_\Omega = \begin{pmatrix} u_\infty \\ v_\infty \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \omega_{a\pm} = \begin{pmatrix} u_\infty \pm a_\infty (\mathbf{e}_\psi)_x \\ v_\infty \pm a_\infty (\mathbf{e}_\psi)_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$V_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_\Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ (\mathbf{e}_\psi)_y \\ -(\mathbf{e}_\psi)_x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_{a\pm} = \begin{pmatrix} \pm a_\infty \\ \rho_\infty (\mathbf{e}_\psi)_x \\ \rho_\infty (\mathbf{e}_\psi)_y \\ \pm a_\infty \end{pmatrix}$$

wobei $\mathbf{e}_\psi = \nabla\psi/|\nabla\psi| = {}^t(\alpha, \beta)/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ die räumliche Orientierung der Phase der Störung beschreibt. Es gibt also in gleichförmiger Strömung genau 3 unabhängige Bewegungsformen:

- (e) Entropiestörung bestehend nur aus einer Dichtekomponente, bewegt mit U_∞
- (Ω) Wirbel- oder Scherstörung bestehend nur aus Geschwindigkeitskomponenten, bewegt mit U_∞
- (a) akustische Störung bestehend aus Dichte, Druck und Geschwindigkeit, bewegt mit $U_\infty \pm a_\infty \mathbf{e}_\psi$

Ausströmrand

Der Ausströmrand ist ein Rand, bei dem die Strömungsgeschwindigkeit nach außerhalb des Gebiets weist. Am Ausströmrand können alle 3 Störungsformen auftreten, d.h. die Störungsvariablen setzen sich folgendermaßen aus Anteilen überlagert zusammen:

$$\begin{aligned} \rho' &= \rho_a + \rho_e && \text{mit den Bezeichnungen} \\ u' &= u_a + u_\Omega && a - \text{„akustisch“} \\ v' &= v_a + v_\Omega && e - \text{„entropisch“} \\ p' &= p_a && \Omega - \text{„Wirbel“} \end{aligned}$$

Bestimmung der substantiellen Ableitung $\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla$ der Dichtebeziehung:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla \rho' = \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla \rho_a + \underbrace{\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla \rho_e}_0$$

Hierbei fällt der entropiebedingte Dichteanteil weg, weil dieser Schwankungsanteil passiv mit der Strömung konvektiert wird. Der verbleibende Ausdruck besteht dann nur noch aus akustischen Dichteanteilen, die über die Isentropiebeziehung mit Hilfe des Drucks, der (s.o.) rein akustischer Art ist, ausgedrückt werden kann

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla \rho' = \frac{1}{a_\infty^2} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla p' \right) \quad (320)$$

...analog für die Geschwindigkeitskomponenten:

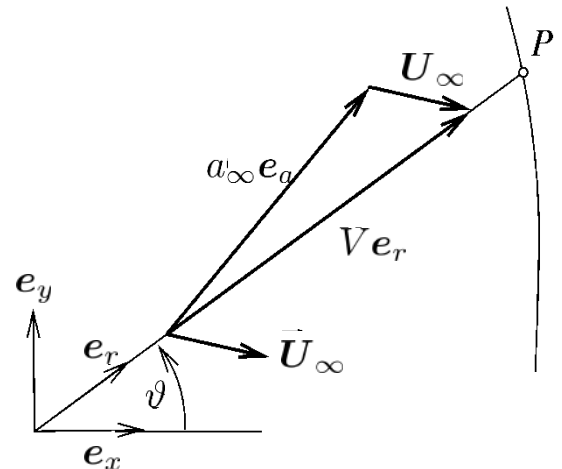
$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla \mathbf{v}' = -\frac{1}{\rho_\infty} \nabla p' \quad (321)$$

Im Fernfeld haben akustische 2D-Lösungen in gleichförmigen Strömungsfeldern die folgende Form (vgl. Abschnitt 2.4.3.3 Vorlesung WS):

$$\begin{bmatrix} \rho_a \\ \mathbf{v}_a \\ p_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(\tau, \vartheta)/a_\infty^2 \\ \mathbf{G}(\tau, \vartheta) \\ F(\tau, \vartheta) \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{r}}; \quad \tau = t - r/V$$

$$V \mathbf{e}_r = a_\infty \mathbf{e}_a + \mathbf{U}_\infty$$

$$\Rightarrow V = \mathbf{U}_\infty \cdot \mathbf{e}_r + \sqrt{a_\infty^2 - \mathbf{U}_\infty^2 + (\mathbf{U}_\infty \cdot \mathbf{e}_r)^2}$$



V beschreibt hierin (vgl. Skizze) die Geschwindigkeit, mit der alle Schallsignale vom Quellzentrum bei $r \approx 0$ in Richtung auf einen Randpunkt P bei der Position (r, ϑ) in Zylinderkoordinaten laufen. Differentiation von p_a nach der Zeit t und r ergibt:

$$\frac{\partial p_a}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}}; \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = 1$$

$$\frac{\partial p_a}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial r} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} - \frac{F}{2r\sqrt{r}}; \quad \frac{\partial \tau}{\partial r} = -\frac{1}{V}; \quad F = p_a \sqrt{r}$$

Wird hieraus $\frac{\partial F}{\partial \tau}$ eliminiert, erhält man mit $p_a = p'$ schließlich

$$\frac{1}{V} \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{p'}{2r} = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{\partial}{\partial r} = \mathbf{e}_r \cdot \nabla \quad (322)$$

Einström- und Tangentialströmrand

Nicht-Ausströmrande können nur solche Störungen überqueren, die sich mit einer anderen Geschwindigkeit als U_∞ bewegen, d.h. ausschließlich akustische:

$$\rho' = \rho_a, \quad u' = u_a, \quad v' = v_a, \quad p' = p_a$$

Die identische Ableitung wie für (322) bei allen anderen Variablen führt dann auf:

$$\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial r} \begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{bmatrix} + \frac{1}{2r} \begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (323)$$

Knotenpunkte für (320)-(322) oder (323):

Es stellt sich die Frage, an welchen Knotenpunkten des Rechengitters die Ausström- bzw. Abstrahlungsbedingungen gefordert werden. Dieses hat numerische Stabilitätsgründe und ist der Skizze zu entnehmen:

