Math. Semesterber. (2003) © Springer-Verlag 2003
Digital Object Identifier (DOI) 10.1007/s00591-003-0063-0

Heiner Lichtenberg

Das anpassbar zyklische, solilunare Zeitzählungssystem des gregorianischen Kalenders

Ein wissenschaftliches Meisterwerk der späten Renaissance

Eingegangen am 25. Juni 2002 / Angenommen am 7. September 2002

Zusammenfassung. Die mathematische Struktur des gregorianischen Kalenders wird anhand der Kalendergleichungen erläutert. Diese werden aus bekannten Zyklen des gregorianischen Kalenders hergeleitet. Die Säkularschaltregel "In je vier Säkularjahren entfallen je drei Schalttage" wird nachvollziehbar entwickelt. Eine neue und besser Säkularschaltfunktion für den "Kalendermond" wird vorgestellt.

Abstract. The mathematical structure of the Gregorian calendar is discussed on the basis of the Calendar equations which are derived from the known cycles of the Gregorian calendar. The origin of the rule "in every four centuries every three centennial leap years revert to common years" can now be explained in an understandable manner. A new and better Secular Leap Function is obtained for the "calendar moon". The revised version of Gauss's Easter formula is given in a little bit more condensed form.

Einleitung

Das Wesen der Reform des Kalenders durch Papst Gregor XIII. im Jahre 1582 wird bis auf den heutigen Tag von der Öffentlichkeit – auch der wissenschaftlichen – nur bruchstückhaft gesehen. Landläufige Meinung ist, die Reform habe durch Ausfall der zehn Datierungen im Oktober 1582, nämlich durch Übergang von Donnerstag, dem 4., auf Freitag, den 15. Oktober, das Frühlingsäquinoktium auf den 21. März zurückverlegt, von wo es im Laufe der Jahrhunderte, die seit dem 1. Ökumenischen Konzil (Nicäa 325) bis zum Jahre 1582 verflossen waren, auf den 11. März abgewandert war. Diese Rückverlegung werde sodann auf ingeniöse Weise gegen weiteres Abwandern gesichert, nämlich durch die Vorschrift, daß von je vier konsekutiven Säkularschaltjahren je drei entfallen sollen, während das vierte, nämlich dasjenige, dessen Jahreszahl restlos durch 400 geteilt werden kann, als Schaltjahr erhalten bleiben soll. Dadurch liege der Frühlingsanfang seitdem stabil auf dem 21. März oder in der unmittelbaren Nähe dieses Datums. Man muß es schon als Zeichen vertiefter Kenntnis bewerten, wenn noch hinzugesetzt wird: Außerdem sei die Methode der Berechnung des Osterdatums "irgendwie" geändert worden. – So die landläufige Kenntnis, auch unter Wissenschaftlern unserer Tage. – So richtig das alles ist, so bleibt das doch eine sehr unvollständige Sicht auf das Kunstwerk des gregorianischen Kalenders. Der heutige Stand des Wissens, genauer: des geringen Wissens, um

---

H. Lichtenberg: Otto-Hahn-Str. 28, 53117 Bonn-Buschdorf, Germany.
e-mail: heiner.lichtenberg@epost.de

die gregorianische Reform ist umso erstaunlicher, als die wesentlichen Grundzüge der Reform schon mit der Bulle Inter gravissimas vom 24. Februar 1582 angedeutet worden waren. Außerdem erschien – allerdings erst 21 Jahre später – unter dem Titel Romani Calendarii Explicatio eine umfangreiche wissenschaftliche Beschreibung des Reformwerks, die der aus Bamberg stammende Jesuit Christophorus Clavius (1538 bis 1612), der damals maßgebliche Mathematiker des Ordens, verfaßt hat [3] (Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf die entsprechenden Einträge im Literaturverzeichnis am Schluß dieses Beitrags). (Zu Leben und Werk von Christophorus Clavius sei hier auf die schöne Studie von Eberhard Knobloch aufmerksam gemacht [11].) Beide, Bulle und wissenschaftliche Beschreibung, jene übrigens in dieser enthalten, scheinen nur wenig und wenn, dann mit "gehaltenen Augen" gelesen worden zu sein. Nur so kann man sich die weit verbreitete Unkenntnis über das Wesen *eines der bedeutendsten Reformwerke der heraufziehenden Neuzeit* erklären. Es ist wohl hauptsächlich der außerordentlichen mathematisch-astronomischen Qualität dieses Kunstwerkes geschuldet, die es tagtäglich durch eine erstaunliche Konkordanz der Zählungen mit den Ereignissen am Himmel, in erster Linie mit den Mondphasen, unter Beweis stellt, dass der gregorianische Kalender in den Durchsetzungskämpfen nicht unterging und spätere Attacken überstand, deren heftigste wohl die durch den Kalender der französischen Revolution war, der auch heute noch – völlig zu Unrecht (aber das ist ein anderes Thema) – hoch gelobt wird. Eine jüngste, wenn auch minder heftige Attacke kommt übrigens von einer ganz unerwarteten Seite, nämlich vom Weltkirchenrat, mit einem gut gemeinten, aber schlecht durchdachten Vorschlag zur Änderung der Berechnungsmethode des Osterdatums [22]. Ich bin sicher: Auch diesen Vorschlag wird der gregorianische Kalender ungeschmälert überleben, das heißt, einschließlich seiner zwar von Anfang an vorhandenen, aber bis heute wenig bewussten und noch weniger erforschten Mondstruktur. Schon bekannte Zeitgenossen der Reform, wie Joseph Justus Scaliger (1540 bis 1609) oder François Viète (1540 bis 1603), aber auch viele Spätere, blieben in Unkenntnis des Wesens der gregorianischen Reform. Johannes Kepler (1571 bis 1630) jedoch ahnte richtig und nahm darüber zusätzlichen Streit mit seinen evangelischen Glaubensgenossen in Kauf, indem er ein zustimmendes Werk verfaßte. Dieses, der Dialogus de Calendario Gregoriano, blieb allerdings über 100 Jahre ungedruckt, vermutlich die Wirkung einer offiziell zwar nicht existierenden, faktisch aber doch vorhandenen Bücherzensur auf evangelischer Seite. Heute sieht man den gregorianischen Kalender zum de-facto-Weltstandard erhoben – Gott sei Dank! –, was natürlich die wirksamste Sicherung für dieses Kunstwerk darstellt. Was neuere Wissenschaft, mindestens teilweise, vom Gregorianischen Kalender und dessen Betrachtung hält, hat Noel Swerdlow 1974 ganz ohne Schnörkel so ausgedrückt: " ... the calendar reform literature is on the whole ‚interesting to few and entertaining to none' (gemeint wohl hauptsächlich die ältere Kontroversliteratur, H.L.), a scholar of sense and taste will readily turn to other labours rather than cultivate this barren field" [21]. Zum Glück gibt es aber auch andere Stimmen, zum Beispiel die von Eberhard Knobloch [12], Karin Reich [20] oder Heinz Zemanek [23]. Wenn vielleicht die eine oder andere Leserin oder der eine oder andere Leser nach der Lektüre dieses Aufsatzes das Thema doch nicht ganz ‚interesting to few and entertaining to none' findet, so wäre dies jedenfalls der schönste Lohn, den sich der Verfasser für diesen Aufsatz denken kann.

Das Wesen der gregorianischen Reform

Das *Wesen der gregorianischen Reform* besteht darin, daß sie das sowohl nach dem Lauf der Sonne (Jahreszeiten) wie auch nach dem Lauf des Mondes (Mondphasen) ausgerichtete, daher solilunar zu nennende, natürlichzahlige Zählschema für die Zeit, das der *julianische Kalender*, bot, vernünftig verallgemeinert und dadurch *zukunftsfest* gemacht hat. (Wenn wir hier und im Folgenden vom "Lauf der Sonne" sprechen, so bedienen wir uns damit natürlich der geozentrischen Sichtweise, die sinnenfälliger als die heliozentrische Sichtweise ist und bei kalendarischen Betrachtungen keinen Nachteil mit sich bringt.) Julius Caesar hatte den julianischen Kalender nach Beratung durch den alexandrinischen Astronomen Sosigenes im Jahre 46 v.Chr. als rein sonnenorientiertes Zählschema für die Zeit eingeführt. Später wurde er durch christliche Gelehrte mit einer Mondstruktur unterlegt, um den Termin des mondabhängigen Osterfestes zweifelsfrei bestimmen zu können. Der aus Cirò in Kalabrien stammende Arzt und Mathematiker Aloysius Lilius (um 1510 bis 1576), der "Grundlagendenker" für die gregorianische Reform, hat dann das zeitrechnerische Fundament des julianischen Kalenders, den nach dem griechischen Astronomen Kallippos von Kyzikos (um 330 v.Chr.) benannten *kallippische Zyklus*:

$$76\, a_{\text{trop}} = 940\, m_{\text{syn}} = 27.759\, d \tag{1}$$

flexibilisiert und damit geänderten oder sich zukünftig noch ändernden Naturgegebenheiten angepaßt. Hierbei bedeuten a_{trop} die Dauer des mittleren tropischen Jahres und m_{syn} die Dauer des mittleren synodischen Monats, beide gemessen in mittleren Tagen d. Dies sind die Maße der Zeit für den julianischen Kalender.

Es ist sofort zu sehen, daß der kallippische Zyklus das kleinstes gemeinsames Vielfache zweier weniger Zeit umfassender, aber bekannterer Zyklen ist, nämlich des nach Meton von Athen (um 450 v.Chr.) benannten *metonischen Zyklus*: $19a_{\text{trop}} = 235\, m_{\text{syn}}$, sowie des wohl aus Altägypten stammenden *Zyklus für das tropische Jahr*: $4\, a_{\text{trop}} = 1.461\, d$, der wegen der möglichen Zerlegung der Tageszahl 1.461 in 3*365 + 1*366 Tage Veranlassung zur eingängigen julianischen Schaltregel gab: Alle vier Jahre ein Schaltjahr von 366 Tagen; sonst ein Gemeinjahr von 365 Tagen.

Das Siebenfache des kallippischen Zyklus, entsprechend den sieben Tage der Woche, liefert den *Osterzyklus des julianischen Kalenders* von 532 Jahren, den schon Victorius (im 5. Jh.) erahnt, dann später Dionysius Exiguus (um 550) angewandt und schließlich Beda Venerabilis (um 673 bis 735) eingehend untersucht und in seinem berühmten (auch heute noch lesenswerten) Buch De temporum ratione dargestellt hat [2]. Der Zyklus der 532 Jahre mit den jeweiligen Osterdaten wird auch "alexandrinischer Osterkanon" genannt [13]. Er erhielt seinen Namen dadurch, daß ihn das Patriarchat von Alexandria bei der Berechnung der Ostertermine anwandte. Der Patriarch von Alexandria war vom 1. Ökumenischen Konzil, das den für die junge Christenheit gefährlichen, sogenannten Osterfeststreit beilegte, auf den hier aber nicht weiter eingegangen werden soll, mit der Berechnung und Bekanntmachung der jeweiligen Ostermine betraut worden. Letzteres geschah durch sogenannte Osterfestbriefe, die außer dem puren Termin auch theologische oder homiletische Betrachtungen enthielten.

Die aus (1) resultierenden Mittelwerte für das tropische Jahr bzw. den synodischen Monat:

$$a_{\mathrm{trop}} = 27.759/76 = 1.461/4 = 365{,}25\,d$$

bzw.

$$m_{\mathrm{syn}} = 27.759/940 = 29,53085\ldots d\ ,$$

weichen spürbar von den *natürlichen Vorgaben* $365,2422\,d$ bzw. $29,5305889\,d$ ab (Rundung der Werte aus [6] auf die 4. bzw. 7. Nachkommastelle). Infolgedessen stellten sich je länger je größere Abweichungen zwischen den Vorhersagen solilunaren Kalenderzählens und den tatsächlichen Phänomenen am Himmel (Eintreten des Frühlingsäquinoktiums sowie der Mondphasen) ein. Da die korrekte und zweifelsfreie Ermittlung des Ostertermins ohne Befragung der Astronomie das Ziel allen solilunaren Zählens war, wurde dieses immer häufiger verfehlt, verglichen mit den Himmelserscheinungen und der in Nicäa 325 gegebenen Definition: *Ostern werde stets am ersten Sonntag nach dem ersten Vollmond im Frühling begangen.*

Der flexibilisierte kallippische Zyklus

Die gregorianische Reform, sprich: Aloysius Lilius, hat das Prinzip solilunaren Zählens bewahrt, dabei jedoch den kallippischen Zyklus durch Einbau von sogenannten *Säkularparametern*, nämlich von gewissen Korrekturgrößen s, P, e und Q in denselben, flexibilisiert:

$$76\,a_{\mathrm{trop}} = (940-(19/750)*(e/Q))\,m_{\mathrm{syn}} = (27.759-(19/25)*(s/P))\,d\ . \quad (2)$$

Die Größe s bedeutet die Anzahl der Schaltjahre, die je Säkularperiode P gegenüber der julianischen Zählweise entfallen. Die Größe e bedeutet die (Netto-)Anzahl der Epaktenschaltungen, die der gregorianische Kalender je Säkularperiode Q vornimmt, wobei Epaktenverminderungen positiv gezählt seien.

Die Epakte ist der entscheidende Parameter für die Mondzählungen im Jahr, nämlich die um 1 verminderte Tageszahl des Lunardatums für den 1. Januars. Kennt man die Epakte eines Jahres, so kennt man (von Details jetzt abgesehen) die Mondphasen für jeden Tag des betreffenden Jahres. Die Mondmonate sind streng an die Mondphasen gebunden. Tag 1 im Mondmonat bedeutet die schmale Sichel am westlichen Abendhimmel, wenn sie erstmals nach Neumond wieder sichtbar wird, auch Neulicht genannt. Tag 14 bedeutet den vollen Mond. Die Tage 7 bzw. 21 bezeichnen den zunehmend bzw. abnehmend halben Mond. (Vorsicht! Epakte = 1 bedeutet nicht Vollmond an Neujahr, wie die Autorin von [20] meint (S. 350), sondern 1 Tag nach der schmalen Sichel. Auch beginnt nicht, wie die Autorin weiter meint, das Sonnenjahr und das Mondjahr am 1. Januar, wenn die Epakte = 1 ist. Selbst bei Epakte = 0, das heißt, dem Neulicht am 1. Januar, würde das Sonnenjahr und das Mondjahr nicht am 1. Januar zugleich beginnen. Das zum Sonnenjahr gehörende Mondjahr beginnt vielmehr stets im März oder April des Sonnenjahres.) Die Dauer der kalendarischen Mondmonate pendelt zwischen 29 und 30 Tagen. Das Pendeln erfolgt so, dass der Durchschnitt der kalendarischen Mondmonate möglichst gut die natürliche Vorgabe der synodischen Mondumlaufszeit trifft.

Der julianische Kalender kannte Epakten, aber keine Epaktenschaltungen. Die Epaktenschaltungen waren mithin ein neues und äußerst erfolgreiches Konstruktionselement des reformierten Kalenders. Es befreite den "Kalendermond" aus seiner "Gefangenschaft" bei der "Kalendersonne", in der er sich zuvor, das heißt, im julianischen Kalender, durch die starre Beziehung des metonischen Zyklus ($235\, m_{\mathrm{syn}} = 19\, a_{\mathrm{trop}}$) befunden hatte.

Die mit den Minuszeichen versehenen Korrekturausdrücke in (2) stellen numerisch kleine Größen dar. Sie sind so klein, dass säkulare Korrektureingriffe genügen, um den julianischen Kalender mit der himmelsmechanischen Wirklichkeit des mittleren Laufs von Sonne und Mond in bedeutend bessere Übereinstimmung als zuvor zu bringen. Korrektureingriffe in schnellerer, untersäkularer Folge sind nicht erforderlich sind. Das zeigen die folgenden einfachen Rechnungen, wobei ich für die Variablen a_{trop} und m_{syn} aus (2) die oben genannten Naturwerten einsetze.

76 Naturjahre sind um $27.759 - 76 * 365{,}2422 = 0{,}5928$ Tage kürzer als 76 julianische Jahre = 27.759 Tage. Die julianische Zählweise der Jahre ist also etwas zu langsam. Der Wert 0,5928 entspricht der Größe $(19/25) * (s/P))$.

Im Naturjahr stecken 365,2422 / 29,5305889 Naturmonate; in 76 Naturjahren stecken demnach 76*365,2422 / 29,5305889 = 939,9882709... Naturmonate. Verglichen mit 940 Mondmonaten, die sich bei metonischer Zählweise in 76 Naturjahren ergeben würden, sind das 940 $-$ 939,9882709... = 0,0117291... Mondmonate zu viel. Die metonische Zählweise ist also etwas zu schnell. Der Wert 0,011729... entspricht der Größe $(19/750) * (e/Q)$.

Die Größen 0,5928 bzw. 0,011729... sind nun beide klein gegen 27.759 bzw. 940. Sie zeigen, dass eine Kalenderkorrektur einerseits das Kalenderjahr verkürzen muss, andererseits aber auch den auf metonischer Basis aus dem verkürzten Kalenderjahr sich ergebenden kalendarischen Mondmonat wieder verlängern muss, um besser an die in der Wirklichkeit gegebenen Verhältnisse heranzukommen. Die erste Erkenntnis hatten wir schon oben beim Vergleich des Mittelwerts a_{trop} des julianischen Kalenders mit dem zugehörigen Naturwert gewonnen. Die andere Erkenntnis überrascht. Zwar war nach dem Vergleich des Mittelswerts m_{syn} des julianischen Kalenders mit dem zugehörigen Naturwert klar geworden, dass auch m_{syn} im Endeffekt zu verkürzen sein würde. Dass aber nach Verkürzung von a_{trop} wieder eine Verlängerung von m_{syn} notwendig sein würde, überrascht dann doch. Das liegt daran, um im obigen Bilde von der Gefangenschaft des Kalendermondes bei der Kalendersonne zu bleiben, dass die gregorianische Reform dem Kalendermond zwar "Ausgang aus dem Gefängnis bei der Kalendersonne" verschafft hat, aber ein "kalendarischer Satellit der Kalendersonne" ist er schließlich doch geblieben, weil nach wie vor abhängig von der Umlaufgeschwindigkeit der Kalendersonne. Durch Erhöhung der Umlaufgeschwindigkeit der Kalendersonne wird der Kalendermond zunächst zu stark mitgerissen und muss daher wieder abgebremst werden, um dem realen Mond nicht "davonzulaufen".

Es wird nun darauf ankommen, Hebel zu erlangen, mit denen man die Verkürzung des Kalenderjahres und die Verlängerung des kalendarischen Mondmonats tatsächlich auch bewirken kann. Dazu rechne ich die ermittelten Zahlen 0,5928 bzw. 0,011729 aufs Naturjahrhundert hoch, was mittels der Faktoren 100/76 bzw. 100/76/30 geschieht. Der erste Faktor ist klar; man kürzt ihn natürlich auf 25/19 herunter. Auch den zweiten Faktor wird man kürzen, nämlich auf 750/19. Der zweite Faktor bedarf aber der Erläuterung hinsichtlich seines Divisors 30. Dieser rührt daher, dass durch die Einheitsschaltung der Epakte die Zahl der Mondmonate im Kalenderzyklus um 1/30 vermindert bzw. vermehrt wird, je nachdem, ob man die Epakte um 1 vermindert bzw. erhöht. (Die Epakte kann die 30 Werte 0 bis 29 annehmen, entsprechend den 30 Tagen, die ein Mondmonat umfassen kann.) Durch Epaktenverminderung wird der durchschnittliche Mondmonat im Kalender länger, der Kalendermond also gebremst. Umgekehrtes gilt natürlich bei Epaktenerhöhung.

Die aufs Naturjahrhundert hochgerechneten Werte lauten:

$$0,5928 * 25/19 = 0,78 \sim 3/4 \text{ Tag},$$
$$\text{0,011729} \ldots * 750/19 = 0,46 \ldots \sim 1/2 \text{ Tag}.$$

Streng genommen handelt es sich bei 0,46. . . um Dreißigstel eines synodischen Monats. Da Dreißigstel eines synodischen Monats aber praktisch Tage sind, nämlich 29,53/30*24 $\sim$ 23 Sunden und 37 Minuten, können wir 0,46. . . Dreißigstel eines synodischen Monats ohne Bedenken als “rund 1/2 Tag” ansprechen.

Die hochgerechneten Werte vermitteln uns zwei wesentliche Informationen:

- in 100 Naturjahren zählt der julianische Kalender “auf der Sonnenseite” etwa 3/4 Tag zuviel, das heißt, in 400 Naturjahren zählt der julianische Kalender etwa 3 Tage zuviel – um diese Zahl von Tagen weicht das Frühlingsäquinoktium je 400 Naturjahren vom 21. März, seinem kalendarisch vorgesehenen Sitz, in Richtung Winter zurück;
- in 100 Naturjahren muss der metonisch berechnete Kalendermond, dessen Umlaufszeit zu kurz ist, nämlich 365,2422*19 / 235 = 29,53022043 Tage, wieder abgebremst werden, nämlich um etwa 1/2 Tag, das heißt, in 200 Naturjahren etwa 1 Tag – sonst würden die Mondphasen in je 200 Naturjahren um je 1 Tag später eintreten, als nach dem metonischen Zyklus berechnet.

Diese Aussagen sind deshalb wichtig, weil sie uns zeigen, dass säkulares Korrigieren als “Heilmittel” gegen die Fehler des julianischen Kalenders tatsächlich ausreicht. Überstiege auch nur einer der beiden hochgerechneten Werte den Wert 1, so wäre der Ansatz der Säkularkorrektur des julianischen Kalenders als gescheitert anzusehen. Man müßte entweder an irgendeiner Säkulargrenze mehr als 1 Tag schalten, oder, wenn man das wegen “großer Unschönheit” nicht will, untersäkular schalten, etwa alle 50 Naturjahre. So jedoch bleibt der Ansatz hoffnungsvoll und wir können uns um eine geeignete Wahl der Säkularparameter weiter bemühen.

Da die hochgerechneten Werte den Ausdrücken s/P und e/Q aus dem flexibilisierten kallippischen Zyklus entsprechen, haben wir einen ersten Anhalt für die Wahl der Säkularparameter gewonnen, nämlich s = 3 und P = 4 sowie e = 1 und Q = 2. Sie würden bedeuten, dass in je 4 Kalenderjahrhunderten je 3 Schalttage ausfallen sollten, sowie, dass in je 2 Kalenderjahrhunderten je 1 Epaktenverminderung um 1 vorgenommen werden sollte. Tatsächlich sind das fast schon die offiziellen Werte. Nur e und Q wurden anders gewählt, nämlich e = 43 und Q = 100. Doch dazu später mehr.

Es steht noch die Herleitung des flexibilisierten kallippischen Zyklus aus einem bekannten kalendarischen Sachverhalt aus. Dies soll jetzt nachgeholt werden:

Im gregorianischen Kalender gilt folgender Zyklus, wie man etwa in [6] nachlesen kann:

$$5.700.000\, a_{\text{trop}} = 70.499.183\, m_{\text{syn}} = 2.081.882.250\, d\ . \tag{3}$$

Diese Beziehung schreibe ich gelinde um, nämlich so:

$$5.700.000\, a_{\text{trop}} = (70.500.000 - 817)\, m_{\text{syn}} = (2.081.925.000 - 42.750)\, d\ . \tag{4}$$

Die Subtrahenden 817 bzw. 42.750 zerlege ich in die Faktoren 19*43 bzw. 19*2250. Weiter dividiere ich die vorstehende Beziehung durch 75.000 = 750*100 = 25*3.000. Dies ergibt dann:

$$\begin{aligned} 76\, a_{\text{trop}} &= (940 - (19 * 43)/(750 * 100))\, m_{\text{syn}} \\ &= (27.759 - (19 * 2.250)/(25 * 3.000))\, d\ . \end{aligned}$$

Kürzt man 2.250/3.000 mit 750, so folgt:

$$76\, a_{\text{trop}} = (940 - (19 * 43)/(750 * 100))\, m_{\text{syn}} = (27.759 - (19 * 3)/(25 * 4))\, d\ .$$

Ersetzt man hierin die Säkularparameter durch ihre Variablen, also 43 durch e, 100 durch Q, 3 durch s, 4 durch P und ordnet noch ein bisschen um, so erhält man schließlich:

$$76 a_{\text{trop}} = (940 - (19/750) * (e/Q)) m_{\text{syn}} = (27.759 - (19/25) * (s/P)) d\ .$$

Die zuletzt erreichte Beziehung ist gerade der eingangs dieses Abschnitts eingeführte flexibilisierte kallippische Zyklus.

Die Notation des flexibilisierten kallippischen Zyklus ist modern und war den Kalenderreformern so natürlich nicht bekannt. Erst rund ein halbes Jahrhundert später hatte René Descartes (1596 bis 1650) die Methode der algebraischen Notation für (geometrische) Probleme entwickelt (Stichwort: Analytische Geometrie). Das hier modern Notierte stimmt aber in der Sache überein mit dem, was die Kalenderreformer taten. Zwar verfügten sie mit den Begriffen des julianischen bzw. metonischen Exzesses über ein halbwegs brauchbares Instrumentarium zur Anpassung des julianischen Kalenders an die Naturwerte. Den flexibilisierten kallippischen Zyklus haben sie in aller Klarheit aber nicht gesehen, ein Defizit mit Folgewirkung, wie wir später ebenfalls noch sehen werden.

Die Gleichungen des gregorianischen Kalenders

Aus dem flexibilisierten kallippischen Zyklus ergeben sich durch eine leichte algebraische Umformung die von mir so bezeichneten Gleichungen des gregorianischen Kalenders [16]:

$$a_{\text{trop}} = (1.461/4 - s/(100 * P))d \tag{5}$$

$$m_{\text{syn}} = a_{\text{trop}}/(235/19 - e/(3.000 * Q)) \tag{6}$$

Wenn man die Säkularparameter nun geschickt wählt, kann man das Zeitzählungssystem mit jeder sinnvoll zu fordernden Genauigkeit den Vorgaben der Natur anpassen.

Die momentanen Einstellungen der Säkularparameter $s = 3$, $P = 4$, $e = 43$, $Q = 100$ führen zu Näherungswerten im gregorianischen Kalender für das tropische Jahr und den synodischen Monat, die von außerordentlicher Qualität sind:

$$a_{\text{trop}} = 146.097/400 = 365{,}2425\,d\;,$$
$$m_{\text{syn}} = 2.081.882.250/70.499.183 = 29{,}5305869\ldots d\;.$$

Insbesondere der Näherungswert für m_{syn} mit seinen sieben zutreffenden Dezimalen (!) besticht. Es ist daher kein Wunder, dass die Säkularparameter seit 1582 bis heute unverändert geblieben sind. Wenn nötig, könnten sie jedoch geändert werden, ein bis heute unbekannt gebliebenes, jedoch einzigartiges Konstruktionsmerkmal des gregorianischen Kalenders, welches dieser mit keinem anderen zyklischen Zeitzählungssystem nach Sonne und Mond teilt, sei es solilunar, wie der gregorianische Kalender selbst, das heißt, nach der Sonne "im Vordergrund" und dem Mond "im Hintergrund" des Zählens orientiert, oder lunisolar, wie beispielsweise der jüdische Kalender, mit dem Mond im Vordergrund und der Sonne im Hintergrund.

Es entspricht übrigens den Tatsachen nicht, wenn neuere Autoren [5] behaupten: "The Hebrew calendar ... is more complicated than the other calendars we have considered so far.". Der gregorianische Kalender, den die zitierten Autoren in den Kreis ihrer Betrachtungen durchaus einbezogen hatten, den sie jedoch in völliger Verkennung der Tatsachen als "strictly solar" bezeichnen, ist dem jüdischen Kalender in jeder Hinsicht mindestens ebenbürtig. Das verwundert auch nicht, beruhen beide Systeme der Zeitzählung, die sich viel ähnlicher sind, als die Öffentlichkeit – auch die wissenschaftliche – bis heute vermutet, doch auf einem gemeinsamen Fundament, welches schon die alten Hochkulturen in Babylon und Ägypten gelegt hatten. Weiter hätten die Autoren ein Zitat von Joseph Justus Scaliger, das dieser 1593 niederschrieb und das sie dem Abschnitt "Structure and History" (des jüdischen Kalenders) ihres Buches gar als Motto voranstellen: "Of all [methods of intercalation] which exist today the Jewish calculation is the oldest, the most skillfull, and the most elegant.", getrost lassen können, wo es gut aufgehoben ist: nämlich in der wissenschaftliche Mottenkiste. Hinsichtlich des grotesken Fehlurteils "strictly solar" seien sie auf eine diesbezügliche Gegenbemerkung von Adolf (später Abraham) Fraenkel aus dem Jahre 1911 verwiesen [7]: " ... on trouve un résultat remarquablement rigoureux, si l'on compte chaque fois, la durée d'une pleine lune pascale à la suivante comme une année. On obient (sic, H.L.) ainsi en substance un calendrier lunisolaire ordonné, c'est-a-dire un calendrier formé d'années lunaires, réglées d'après certains intervalles avec le cours du Soleil, comme on en a d'analogues, avec une autre disposition de détail, dans divers calendriers (par exemple comme chez les Anciens Grecs, ou chez les Romains, ou encore aujourd'hui chez les Juifs).".

Um hier der eventuell möglichen Fehlmeinung vorzubeugen, die Kalendergleichung seien eine Art Erfindung von mir und in den gregorianischen Kalender "hineinphantasiert", da man sie bisher (so gut wie) nirgendwo notiert findet (abgesehen von ganz wenigen Stellen, die aber alle auf mich zurück gehen), so sei hier aus einem "unverdächtigen Dokument" zitiert, welches man in [3] findet, nämlich aus der Bulle "Inter gravissimas" von Papst Gregor XIII. vom 24. Februar 1582, dem Einführungserlaß zum gregorianischen Kalender: "...allatus est nobis (Gregorio XIII.) liber ..., quem ...Aloysius (Lilius) ...conscripserat, in quo per novum quendam *Epactarum Cyclum* ab eo excogitatum ... atque *ad quamcumque anni solaris magnitudinem accomodatum*, omnia, quae in Calendario collapsa sunt, constanti ratione, & *saeculis omnibus duratura*, sic restitui posse ostendit, ut Calendarium ipsum nulli umquam mutationi in posterum expositum esse videatur.", und weiter: "Volumus in eius locum substitui eundem *Cyclum 28. annorum* ab eodem Lilio ... *ad quamcumque anni solaris magnitudinem accommodatum*; ex quo litera Dominicalis ... reperiri potest *in perpetuum*." (Kursivstellungen und Namen in Klammern von mir, H.L.). Zu deutsch: "Uns (Gregor XIII.) wurde ein Buch gebracht, das Aloysius (Lilius) geschrieben hatte. In diesem zeigte er, dass alles, was im Kalender zusammengebrochen war, durch einen neuen Epaktenzyklus, der von ihm erdacht worden ist und der an *jede beliebige Dauer des Sonnenjahres* angepaßt werden kann, und durch eine konstante Rechenmethode, die auf alle Jahrhunderte bestehen bleiben wird, so wiederhergestellt werden kann, daß der Kalender selbst in Zukunft keiner Änderung jemals mehr ausgesetzt erscheint.", und weiter: "Wir wollen, dass an seine Stelle (an die Stelle des bisherigen 28jährigen Zyklus der Sonntagsbuchstaben, des sogenannten Sonnenzirkels, H.L.) der 28jährige Zyklus tritt, den eben dieser Lilius an *jede beliebige Dauer des Sonnenjahres* angepaßt hat, aus dem der Sonntagsbuchstabe auf unabsehbar lange Zeit gefunden werden kann.". Aus den gegebenen Zitaten wird klar, *dass der gregorianische Kalender von allem Anfang weder mit einer festen Dauer des tropischen Jahres, noch mit einer solchen des synodischen Monats gerechnet hat*. Schließlich hatte ja auch Nikolaus Kopernikus (1473 bis 1543), der bei den Vorarbeiten zur Reform befragt worden war, insbesondere auf die mangelhafte Kenntnis und mögliche Nichtkonstanz des tropischen Jahres hingewiesen. Die moderne, algebraische Notation dieser bewußt gestalteten Offenheit des gregorianischen Kalenders wird durch die Kalendergleichungen gegeben. Es scheint, dass die prinzipielle Offenheit der gregorianischen Reform für zukünftige himmelsmechanische Veränderungen von Generationen von Wissenschaftler übersehen worden ist, obwohl sie ganz klar schon in der Bulle Inter gravissimas angesprochen wurde. Das erklärt vielleicht, warum man die Kalendergleichungen bisher nirgendwo sonst findet.

Zyklisches und astronomisches Kalenderrechnen

Oben wurde gesagt, daß das Ziel allen solilunaren Kalenderzählens die korrekte und zweifelsfreie Ermittlung des Ostertermins ohne Befragung der Astronomie ist. Dieses Ziel hat die gregorianische Reform erreicht. Zwar gibt es die sogenannten Osterparadoxien. Das sind gelegentlich fehlerhafte Osterterminansätze (ziemlich genau 10 % aller Fälle im kommenden halben Jahrtausend). Sie sind wegen der relativ starken Ungleichmäßigkeiten der realen Mondbewegung gegenüber ihrem mittleren und gleichförmigen Abbild, wie es das Kalenderzählen unterstellt, aber auch wegen Ungleichmäßigkeiten der realen Sonnenbewegung und schließlich wegen der Enge des 29tägigen Intervalls kalendarisch möglicher Vollmondtermine bei einer Dauer des synodischen Monats von rund 29 $^1/_2$ Tagen unvermeidbar. Obwohl der Mittelwert des synodischen Monats, nämlich 29,5305889 d, auf die angegebenen Dezimalen sinnvoll bestimmbar ist, das heißt, auf mittlere Sicht stabil bleibt in einem sehr präzisen Sinne, kann der einzelne reale Mondmonat doch um mehr als 6 Stunden in beiden Richtungen gegenüber dem Mittelwert abweichen. Da ist es leicht vorstellbar, daß bei Grenzlagen fehlerhafte Ansätze möglich sind. Etwa wenn der Ostervollmond zyklisch auf einen 20. März fällt, der zudem noch ein Freitag sei, real aber auf den 21. März, der real Frühlingsanfang sei. Dann wäre real gesehen am 22. März Ostern. Zyklisch fiele der Ostertermin aber in den April, rund einen Kalendermonat später. Trotz dieser gelegentlichen Abweichungen hat aber die *zyklische Bestimmung des Ostertermins* den *großen Vorzug der Bestimmtheit*. Grenzlagen kommen prinzipiell nicht vor wegen der Diskretheit des zyklischen Rechnens. Das astronomische Rechnen hat dagegen prinzipiell unvermeidbar mit Grenzlagen zu kämpfen, in denen Entscheidungen unsicher werden und zu Streit führen können. Die gregorianische Reform hat mit dem einzigen ernstlichen Gegenargument gegen zyklisches Kalenderrechnen aufgeräumt, nämlich seiner Starrheit. Gerade der julianische Kalender hatte ja gezeigt, daß eine für ein oder zwei Jahrhunderte durchaus brauchbare Lösung doch aus dem Ruder laufen kann, wenn sie ohne Anpassungsmöglichkeit über viele Jahrhunderte ausgeführt wird. Deshalb hat die gregorianische Reform änderbare Säkularparameter eingeführt, mit denen der Kalender langfristigen Änderungen der Mittelwerte in gewissem Umfang, der später noch erläutert wird, folgen kann. Damit ist ein aus mathematisch-naturwissenschaftlicher Sicht mögliches Gegenargument gegen den gregorianischen Kalender entfallen. Der *Vorschlag des Weltkirchenrats aus dem Jahre 1997*, sich bei der Berechnung des Ostertermins in Zukunft nur noch astronomischer Methoden zu bedienen, muß daher wegen mangelnder Erkenntnis über den gregorianischen Kalender als *wissenschaftlich nicht auf der Höhe der Zeit* bezeichnet werden.

Die revidierte Gaußsche Osterformel

Die konkrete Ausgestaltung der Osterterminberechnung geschah mit Mitteln, wie sie in der späten Renaissance und der heraufziehenden Neuzeit zur Verfügung standen, nämlich durch zyklisches Durchlaufen verschiedener Tabellen. Dabei kamen noch nicht die Methoden der elementaren Zahlentheorie im modernen, uns heute geläufigen Umfang zum Einsatz. Insbesondere fehlten noch die Begriffe der Variablen und der Funktion. So ist es kein Wunder, daß Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855) dieses Defizit spürte und mit jugendlichem Feuereifer eine Lücke schloß. Gauß hat im Jahre 1800 eine Formel zur Berechnung des Osterdatums angegeben, die in ihrer ursprünglichen Form allerdings nicht fehlerfrei war [8]. Gauß selbst hat später, nämlich 1816, den Fehler behoben [9]. Damit war die Methode der Osterterminbestimmung rechnerisch in der Neuzeit angekommen. Es blieb aber eine gewisse Schwierigkeit beim Verstehen der Formel bestehen, die hauptsächlich daraus resultierte, daß Gauß sich darüber ausschwieg, ob denn seine Formel tatsächlich nun für beliebige Jahre stets identische Resultate mit dem Vorgehen nach Lilius und Clavius lieferte. Er hat es behauptet, aber nicht bewiesen. Er hätte es auch nicht beweisen können, denn sein erster Anlauf war ja, wie oben gesagt, fehlerhaft. Sodann waren nicht alle Zwischengrößen der Formel ungezwungen zu deuten. Zusätzlich enthielt die Formel zwei Ausnahmebestimmungen, denen man ihren Zweck zwar "an der Nasenspitze" ansah, nämlich die Bewahrung des aus dem alexandrinischen Osterkanons sich ergebenden sogenannten alexandrinischen Osterintervalls, das heißt, daß der Ostertermin stets im Intervall verbleibt, dessen Grenzen durch den 22. März und den 25. April (die Grenzen eingeschlossen) beschrieben werden, die aber doch die Formel unelegant erscheinen ließen. Schließlich blieb das Vorhandensein und die Bedeutung der Säkularparameter verborgen, ihr Eingehen in die Osterformel undeutlich. So war es kein Wunder, daß es auch nach der Berichtigung 1816 immer wieder Verbesserungsvorschläge zur Gaußschen Osterformel gab. Auch ich habe mich 1997 an ihr versucht [15]. Dabei war es mein Bestreben, mit der Formel möglichst nahe an das von Lilius und Clavius vorgegebene Verfahren der Osterterminbestimmung heranzukommen, um so eine Deutung aller Zwischengrößen zu ermöglichen. Die dabei gefundene revidierte Fassung der Gaußschen Osterformel wird inzwischen von der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt in Braunschweig, der für Zeithaltung in der Bundesrepublik Deutschland zuständigen Institution, im Netz präsentiert, vergleiche http://www.ptb.de/de/org/4/43/432/oste.htm.

Die revidierte Gaußsche Osterformel in der Fassung von 1997 enthält ein Korrekturglied, welches meistens Null bleibt, nur in den Fällen, in denen die Kalenderreformer den Termin der sogenannten Ostergrenze, das heißt, des Ostervollmondes, um 1 Tag vorverlegt haben, den Wert 1 annimmt. Dies geschah zur Vermeidung eines Ostersonntags am 26. April. (Die Gründe hierfür kann ich hier nicht darstellen. Sie sind etwas verwickelt. Ich habe sie jedoch in einem bisher ungedruckten Manuskript schon dargelegt.) Das Korrekturglied hatte ich 1997 – etwas unspezifisch – "die kalendarische Korrekturgröße" genannt. Nun möchte ich es genauer benennen, nämlich als "alexandrinische Korrektur", weil es die Einhaltung des alexandrinischen Osterintervalls garantiert. Ich kann es hier in schöner, weil deutlich verkürzter Form präsentieren. Diese verdanke ich Denis Roegel, der mich brieflich auf die bestehende Kürzungsmöglichkeit freundlicherweise aufmerksam gemacht hatte. Weiter nehme ich eine behutsame Umgruppierung der Rechenschritte zur besseren Strukturierung der Formel vor. Schließlich erteile ich der säkularen Sonnenschaltfunktion nun ein entgegengesetztes, nämlich positives Vorzeichen, im Hinblick auf eine leichtere Interpretierbarkeit dieser Funktion, die später noch vorgenommen wird.

Hier nun die revidierte Gaußsche Osterformel. Sie gliedert sich in 4 Abschnitte, die bestimmte Etappen auf dem Wege zum Ostertermin darstellen.

Sei X ein beliebiges Jahr des gregorianischen Kalenders, dessen Osterdatum OS zu ermitteln ist. Dann berechne man der Reihe nach folgende Größen, wobei int(r) die größte in der rationalen Zahl r enthaltene ganze Zahl sei und mod(g,n) der kleinste nichtnegative Rest sei, den die ganze Zahl g bei Teilung durch die natürliche Zahl n übrig läßt:

I. Säkularschaltungen für Sonne und Mond ab 1583 bis zum Jahre X
  1. $K = \mathrm{int}(X/100)$ Säkularzahl
  2. $S = -2 + \mathrm{int}((3 * K + 3)/4)$ Sonnenschaltungen
  3. $M = 15 + \mathrm{int}((3 * K + 3)/4) - \mathrm{int}((8 * K + 13)/25)$ Mondschaltungen

II. Datum SZ des 1. Sonntags im März von X
  1. $SZ = 7 - \mathrm{mod}(X + \mathrm{int}(X/4) - S, 7)$

III. Datum OG des Ostervollmonds im März von X
  1. $A = \mathrm{mod}(X, 19) A + 1 =$ Goldene Zahl
  2. $D = \mathrm{mod}(19 * A + M, 30)$ Keim für OG
  3. $V = \mathrm{int}((D + A/11)/29)$ alexandrinische Korrektur
  4. $OG = 21 + D - V 14$. Nisannu X = Ostergrenze

IV. Osterdatum OS im Jahre X
- $OE = 7 - \mathrm{mod}(OG - SZ, 7)$ Zahl der Tage von der Ostergrenze bis Ostern
- $OS = OG + OE$ Datum des Ostersonntags im März von X

  Falls $OS > 31$, liefert $OS - 31$ das Datum des Ostersonntags im April von X.

Im Abschnitt I werden die Säkularschaltungen des gregorianischen Kalenders abgehandelt. Zentral sind die beiden Säkularschaltfunktionen $S(K)$ und $M(K)$, K die Jahrhundertzahl. Die beiden Säkularparameter $s = 3$ und $P = 4$, s als Faktor bei K in $S(K)$, ergeben sich aus $S(K)$ sofort zu erkennen. Die Säkularparameter $e = 43$ und $Q = 100$ sucht man in M(K) zunächst vergeblich. Darüber später mehr.

Im Abschnitt II wird die Wochentagsverteilung des betreffenden Jahres berechnet. Das geschieht dadurch, daß der 1. Sonntag im März bestimmt wird. Die übrigen Wochentage des Jahres ergeben sich dann daraus.

In Abschnitt III wird das Datum des Ostervollmondes bestimmt. Dieses ist auf der Mondseite des gregorianischen Kalenders ein festes Datum, nämlich der 14. Tag, der Vollmondtag, im 1. Mondmonat des Mondjahres, mit babylonischem Namen Nisannu. Der christliche Mondkalender bezeichnet denjenigen Mondmonat als den ersten im Mondjahr, dessen 14. Tag auf den 21. März fällt oder dem 21. März als nächster Vollmondtag nachfolgt. (Vorsicht! Der jüdische Monat Nissan und der christliche Mondmonat mit dem Ostervollmond, den ich hier zur Unterscheidung vom 1. Monat des jüdischen Mondjahres mit seinem ursprünglichen, babylonischen Namen Nisannu ansprach, liegen zwar oft nahe beieinander, oder sind gar identisch, seltener aber sind sie auch um einen vollen Mondmonat verschieden.) Weiter taucht der altehrwürdige, schon in der Antike bekannte und benutzte chronologische Parameter mit dem Namen "Goldene Zahl" auf. Er ist bis auf eine additive 1 der 19er Rest der Jahreszahl und dient sowohl bei Lilius und Clavius, wie auch bei Gauß zur Parametrisierung der mittleren Mondbewegung. (Vorsicht! Die Formeln für die Goldene Zahl, die die Autorin [20] bzw. der Autor [23] geben, sind nicht korrekt.

Dem Jahr 1994 zum Beispiel würde die Goldene Zahl 0, die es nicht gibt, zugeordnet, anstatt richtig die Goldene Zahl 19.) Selbstverständlich deutet die Goldene Zahl auf den metonischen Zyklus mit seinen 19 Sonnenjahren hin, nach deren Ablauf auf die gleichen Daten des Jahres wieder die gleichen Mondphasen fallen (cum grano salis).

Abschnitt IV verknüpft die Resultate aus den Abschnitten II und III, indem der Tag bestimmt wird, der einerseits zum 1. Sonntag im März einen Wochenabstand hat, also ein Sonntag ist, dabei aber andererseits einen möglichst geringen, jedoch nicht verschwindenden, in die Zukunft gerichteten Abstand von der Ostergrenze hat. Dieser Tag ist der Ostersonntag.

Ersetzt man in obigem Rechengang die säkularen Schaltfunktionen $S(K)$ und $M(K)$ durch die konstanten Werte $S = 0$ und $M = 15$, so erhält man die Osterdaten im julianischen Kalender. In diesem Fall erübrigt sich natürlich eine Berechnung von K; aber auch die Berechnung von V kann unterbleiben, da V im julianischen Kalender konstant Null bleibt.

Wir wollen noch etwas bei der revidierten Gaußschen Osterformel verweilen.

Zunächst: Sie ist periodisch. Ihre Minimalperiode lautet 5.700.000 Jahre. Das sieht man so: Man überzeuge sich durch eine Rechnung, die nicht schwer ist, von dem Bestehen der Relation $OS(X) = OS(X + 5.700.000)$ für beliebiges X. Mithin ist 5.700.000 eine Periode. Weiter hat 5.700.000 die maximalen Teiler 300.000, 1.140.000, 1.900.000 und 2.850.000, wie man aus der Primelementzerlegung von $5.700.000 = 2 \wedge 5 * 3 * 5 \wedge 5 * 19$ ersieht. Keiner von diesen ist eine Periode von $OS(X)$, wie leicht bildbare Gegenbeispiele zeigen. Mithin ist 5.700.000 die Minimalperiode von $OS(X)$.

Die Größe 5.700.000 ist eine der Koeffizienten aus der Beziehung (3), auf die ich mich zur Herleitung des flexibilisierten kallippischen Zyklus berufen hatte. Kann man auch die beiden anderen Koeffizienten, nämlich 70.499.183 und 2.081.882.250, aus der revidierten Gaußschen Osterformel herleiten? – Ja, man kann, und ich habe es 1994 getan [14]. Damals natürlich aus der Gaußschen Osterformel in ursprünglicher Fassung.

Man startet – selbstverständlich mit einem automatischen Rechner – bei einem beliebigen Jahr X. Von dessen Osterdatum zählt man die Zahl der Tage bis zum nächsten Osterdatum, von da bis zum nächsten Osterdatum usw. bis schließlich zum Osterdatum von X + 5.700.000. Summiert man alle Tage, so hat man schon die gesuchte Zahl 2.081.882.250 gefunden. Dividiert man aber vor der Summation die jeweilige Zahl der Tage durch 29,53 – einen guten Näherungswert für die Dauer des synodischen Monats -, so erhält man stets eine Zahl, die nahe bei 12 oder nahe bei 13 liegt, jedenfalls niemals so liegt, daß man in Zweifel geraten könnte, ob nun eher 12 oder eher 13 gemeint ist. Natürlich handelt es sich bei dieser Zahl um die Zahl der Mondmonate von einem Ostertermin zum nächsten. Und die ist entweder 12, wenn es sich um Mond-Gemeinjahr handelt, oder 13, wenn ein Mond-Schaltjahr vorliegt. Summiert man alle Mondmonats-Zahlen, so erhält man 70.499.183, übrigens nebenbei bemerkt: eine Primzahl. Die Beziehung (3) besagt nun, daß die Durchschnittswerte für das Kalenderjahr und den Kalendermondmonat, die der gregorianische Kalender zugrunde legt, rationale Zahlen sind. Sie besagt weiter, dass die Minimalperiode des gregorianischen Kalenders 5.700.000 Kalenderjahre beträgt. Diese umfaßt 70.499.183 Mondmonate, 68.400.000 = 12*5.700.000 gewöhnliche Monate und 2.081.882.250 Tage. Erst in ihr und in keiner kleineren Periode, wiederholen sich alle kalendarischen Erscheinungen – Wochentage, Verteilung der Wochentage auf die gewöhnlichen Monate, Ostertermine – in exakt gleicher Folge.

Wo stecken nun die Säkularparameter 43 und 100 in der revidierten Gaußschen Osterformel? – Dazu bilden wir mit beliebigem X den Ausdruck $M(K(X + 10.000)) - M(K(X))$. Eine leichte Rechnung zeigt: Diese Differenz hat – unabhängig von X – stets den Wert 43. Damit ist 43 gefunden und 100 verbirgt sich natürlich in 10.000, denn 10.000 Jahren sind 100 Säkularjahre.

Die Minimalperiode von 5.700.000 Kalenderjahren muß natürlich richtig gewertet werden. Kein Mensch kann aus heutiger Sicht sagen, was himmelsmechanisch in 5.700.000 Kalenderjahren sein wird, jedenfalls nicht in dem Detail, wie es für eine zutreffende Kalenderrechnung und Osterterminbestimmung benötigt wird. Die Kalenderperiode ist so etwas wie der Krümmungsradius einer Kurve; schon nach kurzem, auf der Kurve zurückgelegtem Weg kann er ein ganz anderer sein. Ebenso verhält es sich mit der Kalenderperiode. Die Frage ist, wie kann man die Krümmungsradien ändern und wie lange kann man den himmelsmechanischen Entwicklungen überhaupt folgen, ohne dass man eine Systemänderung vornehmen muß? Wohlgemerkt: Andere Säkularschaltfunktionen S(K) und M(K), sprich: andere Krümmungsradien, sollen erlaubt sein, nicht aber eine grundsätzliche Änderung des gregorianischen Systems, wie ich es bisher geschildert habe. Kann man für diese Frage eine Abschätzung gewinnen? – Die Suche nach einer Antwort soll uns jetzt beschäftigen.

Das Rechteck der Säkularparameter und das zugehörige Kalendertrapez

Was sieht der Gültigkeitsbereich der Säkularparameter s, P, e und Q aus, die in den Kalendergleichungen (4) und (5) vorkommen? – Offenbar könnten in der Säkularperiode P überhaupt keine Schaltjahre in Säkularjahren entfallen oder einige oder alle, nämlich P Stück. Das bedeutet:

$$0 <= s <= P \quad \text{oder, äquivalent dazu,} \quad 0 <= s/P <= 1 \ .$$

Ein analoges Argument gilt für e und Q, nur mit dem Unterschied, daß Epakten nicht nur vermindert werden können (positive Epaktenschaltung), sondern auch erhöht (negative Epaktenschaltung):

$$-Q <= e <= Q \quad \text{oder, äquivalent dazu,} \quad -1 <= e/Q <= 1 \ .$$

In einem rechtwinkligen x-y-Koordinatensystem beschreiben die obigen Eingrenzungen für $x = s/P$ und $y = e/Q$ folgendes Rechteck mit den Eckpunkten I, II, III und IV:

Ich nenne es das *Rechteck der Säkularparameter*. Alle und nur die Punkte dieses Rechtecks einschließlich seines Randes, deren Koordinaten rationale Zahlen sind, repräsentieren gültige Realisierungen eines Kalenders nach gregorianischem System.

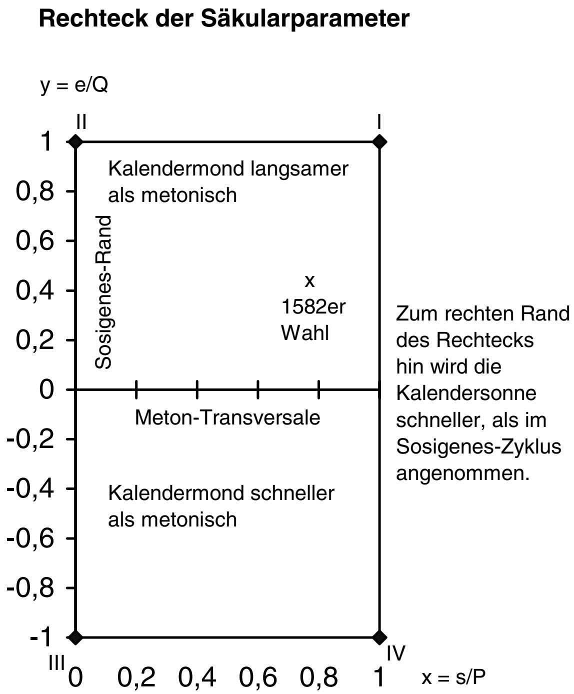

Abb. 1.

Wir wollen das Rechteck genauer betrachten.

Alle und nur die rationalen Punkte auf der y-Achse führen zu Kalendern mit einem durchschnittlichen Kalenderjahr von 1461/4 = 365 1/4 Tagen Dauer. Das sind 365 Tage und 6 Stunden, wie im julianischen Kalender realisiert, den Julius Caesar nach Beratung durch den alexandrinischen Astronomen Sosigenes eingeführt hatte. Ich nenne den linken Rand des Rechtecks daher den *Sosigines-Rand*. Nach rechts hin wird die Kalendersonne immer schneller. Auf dem rechten Rand des Rechtecks hat sie die Umlaufdauer von 365 Tagen, 5 Stunden, 45 Minuten und 36 Sekunden.

Alle und nur die rationalen Punkte auf der x-Achse, die transversal durch das Rechteck verläuft, führen zu Kalendern, deren durchschnittliche Kalenderjahre sich zu den durchschnittlichen Kalendermondmonaten wie 235/19 verhalten, also im Verhältnis des metonischen Zyklus zueinander stehen. verhalten, also im Verhältnis des metonischen Zyklus zueinander stehen. Ich nenne die x-Achse daher die *Meton-Transversale*. In Kalendern, deren Punkte oberhalb der Meton-Transversale liegen, läuft der Kalendermond langsamer als metonisch um; in Kalendern, deren Punkte unterhalb der Meton-Transversale liegen, schneller als metonisch. Auf dem oberen Rand des Rechtecks lautet das Verhältnis der Umlaufdauern von Kalendersonne zu Kalendermond $235/19 - 1/3000 = 704.981/57.000$, auf dem unteren Rand $235/19 + 1/3000 = 705.019/57.000$.

Der Schnittpunkt von Sosigenes-Rand und Meton-Transversale, der Ursprung des x-y-Koordinatensystems, charakterisiert den julianischen Kalender;

das Kreuz im Feld oberhalb der Meton-Transversale charakterisiert die Wahl der Säkularparameter, die die Kalenderreformer 1582 getroffen hatten. Das Rechteck insgesamt öffnet ein *Fenster der Freiheit* im gregorianischen System. Kein anderes zyklisches solilunares oder lunisolares Zeitzählungssystem, das die Menschheit bis 1582 kannte und bis heute kennt, war mit einem solchen Fenster der Freiheit “gleich bei der Geburtäusgestattet worden. Das ist ein entscheidend Neues und merkwürdigerweise bis heute Verkanntes, obwohl es der wissenschaftlichen Öffentlichkeit durch ein mehr als 600 Seiten umfassendes Buch im Format Folio vor mehr als 400 Jahren mitgeteilt worden war. (Es bewahrheitete sich wohl wieder mal, daß dicke Bücher wenig gelesen werden.)

Das nächste Ziel, das wir ansteuern, wird die Klärung der Frage sein: Welche Freiheit besteht hinsichtlich der Abbildung der natürlichen Werte a_{trop}, m_{syn} und d im Kalender?

Setzt man $\xi = a_{\mathrm{trop}}/d$ und $\eta = m_{\mathrm{syn}}/d$ und benutzt man weiter die obigen Setzungen für x und y, so kann man die Kalendergleichungen (4) und (5) durch einfache algebraische Umformung auf folgende Gestalt bringen:

$$\xi = a - b * x \tag{4'}$$

$$\eta = (a - b * x)/(c - d * y) \tag{5'}$$

mit den rationalen Konstanten:

$$\begin{aligned} a &= 1.461/4 \\ b &= 1/100 \\ c &= 235/19 \\ d &= 1/3.000 \end{aligned}$$

Die Gleichungen (4′) und (5′) vermitteln eine Transformation T von Teilen der euklidischen Ebene mit dem orthogonalen x-y-Koordinatensystem in eine andere euklidische Ebene mit dem orthogonalen $\xi - \eta$-Koordinatensystem. Dabei geht das Rechteck der Säkularparameter in folgendes Gebilde über:

Wir wollen es ein bißchen weiter studieren. Eine einfache Rechnung zeigt, daß die Grenzen des zu untersuchenden Gebiets Geraden sind. Die Seiten $\{\mathrm{I}',\mathrm{IV}'\}$ und $\{\mathrm{II}',\mathrm{III}'\}$verlaufen parallel zur η-Achse. Die Seiten $\{\mathrm{II}',\mathrm{I}'\}$ bzw. $\{\mathrm{III}',\mathrm{IV}'\}$, verl$\delta$ngert über I′ bzw. IV′ hinaus, schneiden sich im Ursprung des $\xi - \eta$-Koordinatensystems. Daher sind wir gehalten, das Gebiet korrekterweise als ein Trapez, eben als *Kalendertrapez*, anzusprechen, mag es uns auch in der Abbildung 2 als ein Parallelogramm erscheinen. T bildet das Rechteck der Säkularparameter auf das Kalendertrapez ab, wobei die Ecken von jenem auf die Ecken von diesem abgebildet werden, und zwar I auf I′, II auf II′, III auf III′ und IV auf IV′. Jeder Punkt des Rechtecks, gleichgültig ob im Inneren oder auf dem Rand, geht in einen Punkt des Inneren oder des Randes des Trapezes über. Die Transformation T ist umkehrbar eindeutig und stetig hinsichtlich der üblichen Topologien der beiden Ebenen, also eine topologische Bijektion (bei der sich die Ränder natürlich entsprechen). Den Umlaufsinn allerdings verändert sie. Der Sosigenes-Rand wird von links nach

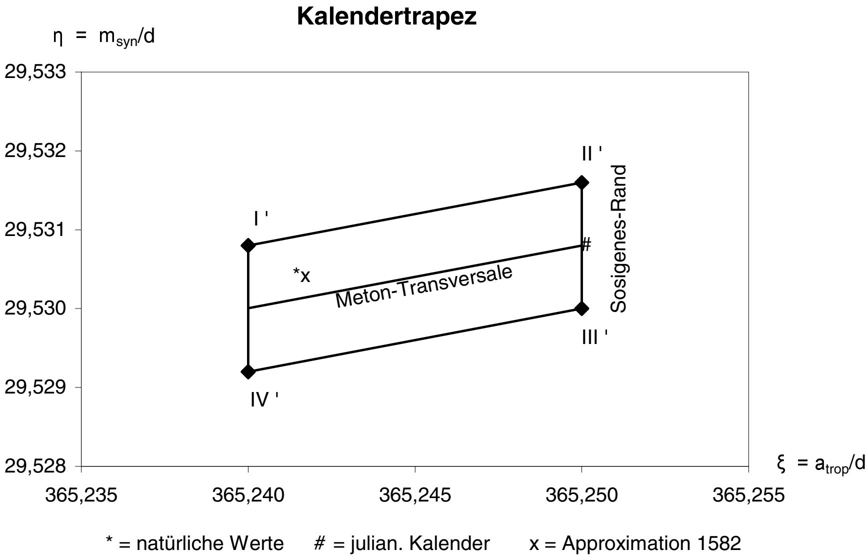

Abb. 2.

rechts versetzt und die obere bzw. untere Hälfte des Rechtecks gehen in die unteren bzw. oberen Teiltrapeze über, die durch die Meton-Transversale einerseits und die untere bzw. obere Grenzgerade des Trapezes gebildet werden.

Die Transformation T^* vom Kalendertrapez ins Rechteck der Säkularparameter zurück wird durch die folgenden Gleichungen mit denselben Koeffizienten a, b, c und d wie bei T vermittelt:

$$x = a/b - \xi/b \tag{4''}$$

$$y = c/d - \xi/(d * \eta) \tag{5''}$$

Die Hintereinanderausführung der beiden Transformationen T und T^* ergibt natürlich die Identität.

Das Rechteck der Säkularparameter kann man, wie wir später noch genauer sehen werden, als "Filter gegen Irrationalitäten in der Zeitrechnung" ansehen. Damit ist Folgendes gemeint: Sollte eines der Verhältnisse a_{trop}/d oder m_{syn}/d (oder $a_{\mathrm{trop}}/m_{\mathrm{syn}}$) irrational sein, wie manche meinen, zum Beispiel Paul Ahnert: "Es ist eine bedauerliche, aber unabänderliche Tatsache, dass die drei Perioden, mit deren Hilfe wir den Zeitablauf einteilen: Tag, Monat, Jahr, nicht kommensurabel sind." [1], oder Karin Reich: "Since the ratio of the number of days in a synodic month to the number of days in a tropical year is irrational, ..." [20], so werden durch die Säkularparameter im Kalender doch stets rationale Annäherungen an a_{trop}/d oder m_{syn}/d (oder $a_{\mathrm{trop}}/m_{\mathrm{syn}}$) erzeugt. Sobald man sich ins Rechteck der Säkularparameter begibt, ist alle Irrationalität der Natur – es sei dahingestellt, ob es sie überhaupt gibt – weggefiltert. (Der "Folklore" von den inkommensurablen Verhältnissen der genannten Naturwerte habe ich mich nie anschließen können, weil der mathematische Begriff der Inkommensurabilität, siehe Euklid, Elemente, Buch 10, Satz 2, für Naturwerte seinen Sinn verliert, bleiben diese doch stets messfehlerbehaftet, wenn sie überhaupt konstant bleiben.)

Die Dimensionen des Kalendertrapezes erscheinen als eher winzig. Der Abstand der Parallelen beträgt sage und schreibe mal eben 0,01, entsprechend 14 Minuten und 24 Sekunden. Das ist der Spielraum für Variationen der Umlaufdauer der Kalendersonne. Beim Mond ist es kaum besser. Links ist das Trapez 0,00159169 breit, rechts 0,00159173, beides so gut wie 2 Minuten und 17 1/2 Sekunden. Das ist der Spielraum für Variationen der Umlaufdauer des Kalendermondes. – Und das soll ein Fenster der Freiheit sein? – Das ist doch eher ein winziges "Gucklöchlein", zumal in der Abbildung 2 die η-Koordinate noch um mehr als das Doppelte überhöht wurde! – Doch gemach! – Das mittlere tropische Jahr und der mittlere synodische Monat verändern sich nur sehr langsam. Das Gucklöchlein reicht gewiß für mehrere Jahrtausende aus, vielleicht sogar für zwei Dutzend Jahrtausende, von Jahrhunderten zu schweigen. Das ist für die Zukunft eine große Spanne, größer als die Spanne, die durch Geschichtsschreibung belegt in die Vergangenheit zurück reicht. Eine genauere Abschätzung der Gültigkeitsdauer scheitert hauptsächlich am Problem der Langzeitentwicklung der Tageslänge, also der Kreiselbewegung der Erde, die viele Komplikationen hat, auf die ich hier auch nicht annähernd eingehen kann. Es gibt Astronomen, die die Entwicklung für Tageslänge für unvorhersagbar ("unpredictable") halten. Jedenfalls beschreibt das Kalendertrapez das genaue Gebiet, innerhalb dessen die gregorianische Kalenderzählung den Naturwerten folgen kann. Solange die Naturwerte innerhalb des (abgeschlossenen) Kalendertrapezes verbleiben, solange wird die gregorianische Kalenderzählung den Naturwerten folgen können und uns zu Ostern stets den vollen oder ungünstigsten Falls den abnehmend halben Mond leuchten lassen. Eine Sonnenfinsternis zu Ostern kann in den genannten Jahrtausenden mit Sicherheit ausgeschlossen werden. Aus heutiger Sicht bleibt es allerdings unbekannt, wie lange es tatsächlich dauern wird, bis der gregorianische Kalender schließlich dann doch einmal sein "Verfalldatum" erreichen wird.

Die Abbildung 2 zeigt übrigens auch, eine wie überzeugende Verbesserung die gregorianische Reform gebracht hatte. Der Stern (*) deutet die Lage der Naturwerte an, damals, 1582, wohl ziemlich genau die von heute. Das Nummernzeichen (#) am Sosigenes-Rand zeigt den Ausgangspunkt der Kalenderreformer an, nämlich die Werte des julianischen Kalenders. Das Kreuz (x) zeigt die erstaunlich gute Annäherung an, die den Kalenderreformern schließlich auf ihrem mühevollen Weg gelungen ist.

In den beiden kommenden Abschnitten will ich mich mit folgender Frage befassen: Gegeben Naturwerte a_{trop}, m_{syn} und d. Wie findet man möglichst gute Säkularparameter s, P, e und Q?

Herleitung von Säkularparametern aus der Natur

Setzt man in die Gleichungen (4") und (5") die aus den Naturwerten a_{trop}, m_{syn} und d gebildeten Ausdrücke a_{trop}/d für ξ und m_{syn}/d für η ein, so erhält man Werte für $x = s/P$ und $y = e/Q$, die das Kalenderproblem lösen sollten, nämlich

$x = s/P = 0,78 = 39/50$ und $y = e/Q = 0,46298914\ldots \sim 0,46298914 = 23.149.457/50.000.000$. Das führt aber zu kalendarisch ganz und gar unhandlichen Werten, nämlich $s = 39$, $P = 50$, $e = 23.149.497$ und $Q = 50.000.000$. Eine Kalenderperiode P von 5.000 Kalenderjahren ist schon zu groß. In welchen der 39 von 50 Säkularjahren sollten die Schalttage gestrichen werden? Eine streitträchtige Frage! Eine Kalenderperiode Q von gar 5.000.000.000 Kalenderjahren mit 23.149.497 Epaktenverminderungen ist vollends absurd! So geht es also nicht. Hier muß vereinfacht werden, nur wie?

Die rettende Idee ist, die Werte 0,78 und 0,46298914… lediglich als "Leuchttürme" anzusehen, die durch rationale Zahlen mit möglichst kleinen Zählern und Nennern anzusteuern sind. Man kann versuchen, diese Zusatzforderung durch Kettenbruchentwicklungen von 0,78 und 0,46298914… mit anschließender Auswahl von geeigneten Näherungsbrüchen zu erfüllen. Tatsächlich ist dieser Weg gangbar und bei verwandten Problemstellungen auch schon begangen worden, so etwa durch Christiaan Huygens (1629 bis 1695) bei der Konstruktion von Zahnrädern für ein Planetarium (vgl. [19], Bemerkung am Schluß von Kapitel 16). Ja, selbst in der Kalendertheorie taucht der Gedanke schon 1785 auf. So lobt Barnaba Oriani (1752 bis 1832) die Verwendung von Kettenbrüchen bei der Suche nach Kalenderzyklen (" … ad inveniendos Ciclos Calendarii") [18], freilich ohne die Kalendergleichungen zu kennen.

Ein regulärer Kettenbruch einer nicht-negativen reellen Zahl z wird durch folgenden rationalen Ausdruck gegeben:

$$z = n_1 + 1/(n_2 + 1/(n_3 + \ldots)),$$

wobei n_1 eine ganze Zahl ist und alle Nenner n_2, $n_3, \ldots$ natürliche Zahlen sind. Die Bezeichnung "regulär" bedeutet, dass alle Zähler 1 sind. Die Zahlen n_1, n_2, n_3, … werden durch z in folgender Weise bestimmt: n_1 ist die größte in z enthaltenen ganze Zahl. Wenn z schon gleich n_1 ist, dann stoppt die weitere Entwicklung von z in einen Kettenbruch. Wenn nicht, dann ist n_2 die größte ganze in $1/(z - n_1)$ enthaltenen Zahl und so weiter. Die Folge der Zahlen n_1, n_2, n_3, … wird genau dann abbrechen, wenn z eine rationale Zahl ist. Für eine rationale Zahl z ist die Folge der Zahlen n_1, n_2, n_3, … sogar eindeutig bestimmt, wenn man zusätzlich noch verlangt, dass das letzte Element der Folge größer als 1 ist. Für negative z wird die Kettenbruchentwicklung durch Entwicklung von $-z$ wie oben beschrieben erlangt.

Für die reguläre Kettenbruchentwicklung von z werde ich das Symbol

$$z = [n_1, n_2, n_3, \ldots]$$

benutzen.

Hinter der Kettenbruchentwicklung einer Zahl verbirgt sich natürlich nichts anderes als das Verfahren der Wechselwegnahme des Kleineren vom Größeren, welches schon Euklid im 7. Buch der Elemente, Sätze 1 und 2, beschrieben hat. Daher wird es auch "Euklidischer Algorithmus" genannt. Kettenbrüche waren den Kalenderreformern geläufig, hatte doch Clavius zum Beispiel einen bekannten Kommentar zu Euklids Elementen herausgegeben [4], wohingegen Dezimalbruchentwicklungen noch nicht zum geläufigen Instrumentarium der Kalenderreformer gehörten.

Das bekannte Buch “De Thiende” von Simon Stevin (1548 bis 1620) erschien erst 1585.

Aus der Theorie der Kettenbrüche ist bekannt, dass die Folge der Näherungsbrüche

$$[n_1], [n_1, n_2], [n_1, n_2, n_3], \ldots$$

die Zahl z mit zunehmender Anzahl der Glieder immer besser approximiert. Die Folgenglieder haben darüber hinaus die angenehme Eigenschaft, dass, wenn man sie in gewöhnliche Brüche zurückverwandelt, die Zähler und Nenner dieser Brüche optimal klein ausfallen. Genau nach dieser Eigenschaft halten wir ja Ausschau. Man kann die Redeweise “optimal klein” sogar präzisieren. Das sei mir aber hier erlassen. Ich darf vielmehr für weitergehende Ausführungen zu dem interessanten Gebiet der Kettenbrüche, welches in der Öffentlichkeit heute so gut wie vergessen ist – die Dezimalbrüche haben alles “überwuchert” –, noch mal auf die Literaturstelle [19], nämlich das schöne Buch von Oskar Perron “Die Lehre von den Kettenbrüchen” verweisen.

Nach diesem Exkurs zu den Kettenbrüchen entwickele ich jetzt die Werte 0,78 und 0,46298914... in reguläre Kettenbrüche:

$$0,78 = [0, 1, 3, 1, 1, 5] \quad \text{und} \quad 0,46298914\ldots = [0, 2, 6, 3, 1, 12, \ldots].$$

Betrachten wir zunächst die Folge f_1, f_2, ..., f_6 der Näherungsbrüche zu 0,78:

		Relativer Fehler in %
$f_1 = [0] = 0$	$< 0,78$	-100
$f_2 = [0, 1] = 1/1 = 1$	$> 0,78$	$+28,2$
$f_3 = [0, 1, 3] = 3/4 = 0,75$	$< 0,78$	$-3,8$
$f_4 = [0, 1, 3, 1] = 4/5 = 0,8$	$> 0,78$	$+2,6$
$f_5 = [0, 1, 3, 1, 1] = 7/9 = 0,(7\text{per})$	$< 0,78$	$-0,3$
$f_6 = [0, 1, 3, 1, 1, 5] = 39/50$	$= 0,78$	0

Die bei f_5 auftretende Bezeichnung (7per) bedeutet, dass 7 die Periode dieses Dezimalbruches ist. Allgemeiner: Wenn n Dezimalziffern $k_1k_2k_3\ldots k_n$ eines Dezimalbruchs eine Periode bilden, bezeichne ich diese durch ($k_1k_2k_3\ldots k_n$per).

Der Näherungsbruch f_1 liefert $s = 0$ und P eine beliebige natürliche Zahl. Das bedeutet: Es soll kein säkulares Schaltjahr ausfallen. Das ist der Fall des julianischen Kalenders mit der Kalenderjahreslänge von 365,25 Tagen.

Der Näherungsbruch f_2 liefert $s = 1$ und $P = 1$. Das bedeutet: Wegfall jeden säkularen Schaltjahres. Dies würde eine Kalenderjahreslänge von 365,24 Tagen bedeuten, zwar näher am Naturwert 365,2422 Tage als die julianische Lösung, aber doch nicht nahe genug.

Der Näherungsbruch f_3 liefert $s = 3$ und $P = 4$. Das bedeutet: Wegfall von 3 säkularen Schaltjahren in 4 Jahrhunderten. Es ist die gegenwärtige Form des gregorianischen Kalenders mit der Kalenderjahreslänge von 365,2425 Tagen, eine Annäherung an den Naturwert mit immerhin 6 richtigen Dezimalen (!).

Der Näherungsbruch f_4 liefert $s = 4$ und $P = 5$. Das bedeutet: Wegfall von 4 säkularen Schaltjahren in 5 Jahrhunderten und bewirkt eine relativ bescheidene Verbesserung gegenüber f_3, wie auch die relativen Fehler der Näherungsbrüche

f_3 bzw. f_4 gegen 0,78 zeigen, nämlich $-3,8$ % bzw. 2,6 %. Trotzdem wurden noch vor kurzem, nämlich 1998, auch diese Säkularparameter von Shinji Kinoshita [10] ohne Kenntnis der Kalendergleichungen vorgeschlagen. Sie führen zu einer Kalenderjahreslänge von 365,242 Tagen.

Der Näherungsbruch f_5 liefert $s = 7$ und $P = 9$. Das bedeutet: Wegfall von 7 säkularen Schaltjahren in 9 Jahrhunderten und führt zu einer beinahe perfekten Annäherung des Kalenderjahres 365,24(2per) an den Naturwert. Der oben zitierte Barnaba Oriani hatte diese Säkularparameter schon 1785 vorgeschlagen [18] und später dann, im Jahre 1923, erneut Milutin Milankowich (1879 bis 1958) [17], auch dieser wie Oriani ohne Kenntnis der Kalendergleichungen.

Der Näherungsbruch f_6 liefert $s = 39$ und $P = 50$. Er reproduziert den Wert 0,78, von dem wir ausgegangen waren. Die Säkularparameter liegen aber jenseits einer Grenze, die sinnvollerweise einzuhalten ist. Eine Periode von 5.000 Kalenderjahren ist schlicht zu groß; die praktische Konstanz von a_{trop} auf diese Zeit wohl nicht gesichert; eine Regel, die den Wegfall von 39 aus 50 Säkularjahren beschriebe, wohl auch zu unhandlich und der Öffentlichkeit kaum zu vermitteln.

Nach diesem erfreulichen Verlauf der Suche nach geeigneten Säkularparametern s und P versuchen wir, das Verfahren auf die Säkularparametern e und Q anzuwenden.

Die Folge der Näherungsbrüche $g_1, g_2, g_3, \ldots$ lautet:

		Relativer Fehler in %
$g_1 = [0] = 0$	$< 0,46298914\ldots$	-100
$g_2 = [0,2] = 1/2 = 0,5$	$> 0,46298914\ldots$	$+8,0$
$g_3 = [0,2,6] = 6/13 = 0,(461538\text{per})$	$< 0,46298914\ldots$	$-0,3$
$g_4 = [0,2,6,3] = 19/41 = 0,(46341\text{per})$	$> 0,46298914\ldots$	$+0,1$
$g_5 = [0,2,6,3,1] = 25/54 = 0,4(629\text{per})$	$< 0,46298914\ldots$	$-0,0$
$g_6 = [0,2,6,3,1,12] = 319/689$ $= 0,46298984\ldots$	$> 0,46298914\ldots$	$+0,0$

usw.

Erste, bedauerliche Feststellung, die wir treffen müssen: Anders als für der Folge $\{f_i\}$ taucht in der Folge $\{g_i\}$ der offizielle Wert 43/100 nicht auf. Zweite, noch bedauerlichere Feststellung: Wenn wir auf der Sonnenseite des gregorianischen Kalenders die offiziellen Werte der Säkularparameter, nämlich $s = 3$ und $P = 4$, zugrunde legen und aus ihnen und den obigen Näherungsbrüchen mittels der Kalendergleichung (5) die Umlaufszeiten $m_{\text{syn},i}, i = 1, \ldots, 6$, des Kalendermonds berechnen, so erhalten wir:

$$m_{\text{syn},1} = 365,2425/(235/19) = 29,53024468\ldots d,$$
$$m_{\text{syn},2} = 365,2425/(235/19 - -1/(3.000 * 2)) = 29,53104055\ldots d,$$
$$m_{\text{syn},3} = 365,2425/(235/19 - -6/(3.000 * 13)) = 29,53061200\ldots d,$$
$$m_{\text{syn},4} = 365,2425/(235/19 - -19/(3.000 * 41)) = 29,53061349\ldots d,$$
$$m_{\text{syn},5} = 365,2425/(235/19 - -25/(3.000 * 54)) = 29,53061313\ldots d,$$
$$m_{\text{syn},6} = 365,2425/(235/19 - -319/(3.000 * 689)) = 29,53061316\ldots d,$$

das heißt, die Werte $m_{\text{syn},i}$ scheinen sich nicht dem Naturwert 29,5305889 d zu nähern, sondern einem davon deutlich verschiedenen Wert 29,5306131… d, der zudem noch deutlich verschieden ist vom offiziellen gregorianischen Wert 29,5305869... d. Haben wir etwas falsch gemacht, oder, schlimmer noch (für den Verfasser), stimmt eventuell die Kalendergleichung (5) für die synodische Mondmonatsdauer des Kalenders nicht? Vielleicht sind die Kalendergleichungen, wenigstens die Gleichung (5), eben doch ein Hirngespinste von mir? – Das Letztvermutete ist nicht der Fall. Vielmehr haben wir etwas falsch gemacht. Und zwar folgendes: Wir berechneten $y = e/Q = 0,46298914\ldots \sim 0,46298914$ aus der Gleichung (5"), nachdem wir in diese zuvor für die Werte ξ und η in einem Zug die Naturwerte $a_{\mathrm{trop}}/d = 365,2422$ und $m_{\mathrm{syn}}/d = 29,5305889$ eingesetzt hatten. Das war etwas zu hastig, denn damit haben wir den Kalendermond metonisch zum Satelliten der Natursonne gemacht. Richtig wäre es gewesen, den Kalendermond metonisch zum Satelliten der Kalendersonne zu machen und dann mit Hilfe des Naturwerts für m_{syn} die Abweichungen von der metonischen Zählweise zu ermitteln, das heißt, anstelle des Werts $a_{\mathrm{trop}}/d = 365,2422$ hätten wird in die Gleichung (5") den Wert $a_{\mathrm{trop}}/d = 365,2425$ einzusetzen müssen, den wir aus dem Approximationsprozeß mittels der Näherungsbrüche f_i, $i = 1,\ldots,6$, erhalten hatten. Setzen wir also in (5") die Werte $a_{\mathrm{trop}}/d = 365,2425$ und $m_{\mathrm{syn}}/d = 29,5305889$ ein. Wir erhalten: $y = e/Q = 0,43251227\ldots$. Dieser Wert ist deutlich verschieden von dem zunächst erhaltenen Wert 0,46298914... . Die beiden ersten Nachkommastellen lassen uns sogar hoffen, dass wir nun unter den Näherungsbrüchen den offiziellen Wert 43/100 finden werden.

Die Entwicklung von 0,43251227... in einen regulären Kettenbruch liefert:

$$0,43251227\ldots = [0,2,3,4,1,8,\ldots] \quad .$$

Die Folge der Näherungsbrüche $\{h_i\}$ zu 0,43251227... lautet:

		Relativer Fehler in %
$h_1 = [0] = 0$	$< 0,43251227\ldots$	-100
$h_2 = [0,2] = 1/2 = 0,5$	$> 0,43251227\ldots$	$+15,6$
$h_3 = [0,2,3] = 3/7 = 0,(428571\mathrm{per})$	$< 0,43251227\ldots$	$-0,9$
$h_4 = [0,2,3,4] = 13/30 = 0,4(3\mathrm{per})$	$> 0,43251227\ldots$	$+0,2$
$h_5 = [0,2,3,4,1] = 16/37 = 0,(432\mathrm{per})$	$< 0,43251227\ldots$	$-0,0$
$h_6 = [0,2,3,4,1,8] = 141/326$ $= 0,43251533\ldots$ usw.	$> 0,43251227\ldots$	$+0,0$

Leider taucht auch unter diesen Näherungsbrüchen der offizielle Wert 43/100 nicht auf. Trotzdem brauchen wir uns nicht zu grämen. Nähern sich doch jetzt die Umlaufszeiten $m_{\mathrm{syn},i}$, $i = 1,\ldots,6$, sichtlich dem vorgegebenen Naturwert 29,5305889 d an, ja, schon $m_{\mathrm{syn},4}$ ist besser als der offizielle gregorianische Wert, wohlgemerkt, bei einer Periode, die zwar auch noch 3.000 Kalenderjahre umfaßt, die aber immerhin weniger umfasst als 1/3 der offiziellen Periode von 10.000 Kalenderjahren:

$$m_{\mathrm{syn},4} = 365,2425/(235/19 - -13/(3.000 * 30)) = 29,53058955\ldots d \,.$$

Um eine etwas plastischere Vorstellung von der Genauigkeit einer Kalenderausprägung im gregorianischen System zu erhalten, noch folgende Überlegung: Wir fragen, in wieviel Naturjahre und Naturmondmonate die – zugegeben – riesige Zahl von 1 Milliarde Tagen zerfällt. Dabei setzen wir natürlich voraus, daß alle beteiligten Zeitdauern konstant bleiben. Dann ist die Frage nicht schwer zu beantworten: 1 Milliarde Tage zerfallen in 1.000.000.000 / 365,2422 = 2.737.909,255... Naturjahre und 1.000.000.000 / 29,5305889 = 33.863.191,93... Naturmondmonate. Nun werde dieselbe Frage für den gregorianischen Kalender nach offizieller Ausprägung gestellt und beantwortet: 1 Milliarde Tage zerfallen im gregorianischen Kalender offizieller Ausprägung in 1.000.000.000 / 365,2425 = 2.737.907,007.... bürgerliche Jahre und in 1.000.000.000 / 29,5305869... = 33.863.194,23... kalendarische Mondmonate, das heißt, auf der Sonnenseite gliedert der gregorianische Kalender offizieller Ausprägung 1 Milliarde Tage in gut 2 Kalenderjahre zu wenig, entsprechend der Tatsache, daß die Umlaufzeit der Kalendersonne etwas zu langsam ist, und auf der Mondseite in gut 2 kalendarische Mondmonate zuviel, entsprechend der Tatsache, daß die Umlaufzeit des Kalendermondes etwas zu schnell ist. Es wird auch deutlich, daß die Genauigkeit der Anpassung auf der Mondseite höher ist als auf der Sonnenseite. Das hat einen beobachtungstechnischen Grund: Die Bewegung der realen Sonne gegen den Sternenhintergrund, genauer: gegen den Frühlingspunkt, ist schwerer zu messen, weil sie alles überstrahlt, als die Bewegung des realen Mondes gegen die reale Sonne. Für die Bestimmung der letztgenannten Bewegung bedienten sich schon die Alten eines hervorragenden Hilfsmittels, nämlich der Langzeitbeobachtung von Sonnenfinsternissen. Ein gregorianischer Kalender mit den Säkularparametern $s = 3$, $P = 4$, $e = 13$ und $Q = 30$ zerlegt 1 Milliarde Tage in ebenso viele bürgerliche Jahre, wie es durch den gregorianischen Kalender offizieller Ausprägung geschieht, und in 1.000.000.000 / 29,53058955... = 33.863.191,19 Kalendermondmonate. Das sind rund 3/4 Kalendermondmonate zu wenig, entsprechend der Tatsache, daß der Kalendermond nun eine winzige Winzigkeit zu langsam läuft.

Abschließend noch ein Wort zur Minimalperiode eines gregorianischen Kalenders mit den Säkularparametern $s = 3$, $P = 4$, $e = 13$ und $Q = 30$. Setzt man die Säkularparameter in den flexibilisierten kallippischen Zyklus (2) ein und beseitigt die Nenner, so erhält man:

$$1.710.000\, a_{\text{trop}} = 21.149.753\, m_{\text{syn}} = 624.564.675\, d\ .$$

Die Koeffizienten sind teilerfremd, wie man daraus ersieht, daß keiner der Primteiler 2, 3, 5 und 19 von 1.710.000 den Koeffizienten 21.149.753 teilt. Der Primteiler 7 teilt aber die Tageszahl. Daraus folgt: Die obige Beziehung ist die Minimalperiode des modifizierten gregorianischen Kalenders. Die Dauer der Minimalperiode beträgt "nur" 30% der Dauer der Minimalperiode des offiziellen gregorianischen Kalenders, die bekanntlich 5.700.000 Kalenderjahre umfaßt. Trotzdem ist die Jahreslänge nicht schlechter und die Mondmonatslänge sogar besser bestimmt, als dies im offiziellen gregorianischen Kalender der Fall ist.

Wie fanden die Kalenderreformer die Säkularparameter?

Diese Frage stellt sich jetzt energisch, denn erstens standen den Kalenderreformer die Kalendergleichungen (4) und (5) nur unvollständig zur Verfügung und zweitens kannten sie auch nicht die modernen Werte für a_{trop} und m_{syn}, die uns Heutigen zur Verfügung stehen. Wie gelang ihnen dann die überraschend glückliche Wahl von $s = 3$, $P = 4$, $e = 43$ und $Q = 100$?

Die Kalendergleichung (4) stand ihnen in verkappter Form zur Verfügung, nämlich im Begriff des sogenannten julianischen Exzesses E_j. Dieser wird definiert als die reziproke Differenz zwischen der julianischen Jahreslänge von 365 1/4 Tagen und der Jahreslänge des Naturjahres a_{trop}:

$$E_j = 1/(365,25 - a_{\text{trop}}) \ .$$

Der julianische Exzess bedeutet die Anzahl Naturjahre, die verfließen müssen, bis die Zahl der julianischen Jahre genau 1 Tag mehr enthält als die Zahl der Naturjahre. Die Reduktion des julianischen Exzesses auf ein Naturjahrhundert ergibt:

$$r = 100/E_j \ .$$

Das ist der Bruchteil r eines Tages, den ein julianisches Jahrhundert mehr enthält als ein Naturjahrhundert. Setzt man ihn gleich s/P, das heißt, gleich dem Verhältnis von s auszulassenden Schalttagen in der Säkularperiode von P julianischen Jahrhunderten, so ergibt sich weiter:

$$s/P = 100/E_j = 100 * (365,25 - a_{\text{trop}}) = 100 * (1.461/4 - a_{\text{trop}})$$

oder

$$a_{\text{trop}} = 1.461/4 - s/(100 * P) \ .$$

Das ist die Kalendergleichung (4).

Die Kalendergleichung (5) stand den Kalenderreformern im Begriff des sogenannten metonischen Exzesses nur undeutlich vor Augen. Das führte dazu, daß sie durch eine gewisse Intuition ersetzen mußten, was ihnen an mathematischer Präzision ihres Instrumentariums fehlte. Das ist der tiefere Grund für die Asymmetrie der Perioden: 4 Jahrhunderte auf der Sonnenseite des Kalender gegen 100 Jahrhunderte auf der Mondseite.

Mit der Kalendergleichung (4) und der Technik der Kettenbruchentwicklung wird das Auffinden von $s = 3$ und $P = 4$ verständlich. Es standen den Kalenderreformern (laut [21]) drei Bestwerte für a_{trop} zur Verfügung: der erste stammt aus den Alfonsinischen Tafeln (nach Alfons X. (1221 bis 1284), genannt der Weise, König von Kastilien und León), der andere von Nikolaus Kopernikus, der dritte von Erasmus Reinhold (1511 bis 1553). Die Kettenbruchentwicklungen von s/P, basierend auf den drei genannten Werten, führen zu [0,1,2,1,12, ...] bzw. [0,1,2,1,11, ...] bzw. [0,1,2,1,13, ...]. Der übereinstimmende Näherungsbruch aus diesen drei Kettenbruchentwicklungen lautet: $[0, 1, 2, 1] = 3/4 = s/P$. Damit ist die Wahl von $s = 3$ und $P = 4$, in der manche Leute, so auch der Autor von [21], ein Geheimnis sehen wollen, auf einfachste Weise erklärt. Genannter Autor loco citato jedoch: “The mean length of the year is ... 365 97/400 days = 365^{d} 5^{h} 49^{m} 12^{s}. Curiously, this value of the length of the year has never been explained, and so the exact origin of our calendar is unknown.”. – Die Lösung, die der Autor dann anbietet, nämlich über die Sexagesimaldarstellungen des Tagbruchteils der drei damaligen Bestwerte, überzeugt mich nicht, weil abhängig von der Zahldarstellung. Die oben gegebene Lösung halte ich für "natürlicher".

Wie die Kalenderreformer zu dem allerdings erstaunlichen Resultat $e = 43$ und $P = 100$ kamen, ist eine spannende Sondergeschichte, die ich aus Platzgründen hier nicht mehr erzählen kann. Nur dieses sei gesagt: Kleine Fehler in der Rechenmethode bewirkten in Verbindung mit einer kleinen Differenz, die der spätmittelalterliche-frühneuzeitliche Wert von m_{syn} gegen den modernen Wert aufweist, daß sie "schlafwandelnd" fast auf den Punkt den modernen Wert trafen! – Man könnte geradezu von einem "kleinen mathematischen Wunder" sprechen.

Die säkularen Schaltfunktionen für Sonne und Mond

Die Zahlen $s = 3$ und $P = 4$ verlangen nur, daß 3 Schaltjahre an 4 Jahrhundertgrenzen als Gemeinjahre gezählt werden sollen. Sie beantworten nicht die Frage, welche Schaltjahre verwandelt werden sollen und welche Schaltjahre bleiben sollen. Zum Beispiel kann man, wie es die offizielle Lösung vorsieht, das Schaltjahr in all den Säkularjahren belassen, deren Jahreszahl X durch 400 ohne Rest geteilt werden kann. Das ist eine sehr eingängige Regel. Vom mathematischen Standpunkt aus hätte man aber genau so gut anordnen können: Das Schaltjahr soll in all den Säkularjahren erhalten bleiben, in denen die Säkularzahl K = X/100 bei Division durch 4 den Rest 1, 2 oder 3 zurück läßt. Tatsächlich hatte schon 1560 Petrus Pitatus, ein Mathematiker aus Verona, vorgeschlagen, das Schaltjahr in denjenigen Säkularjahren beizubehalten, für die $\mathrm{mod}(K, 4) = 3$ ist [21]. Die Anordnung der Daten in einem so geordneten Kalender wäre eine leicht andere, aber die astronomische Qualität einer solchen Ausprägung des gregorianischen Kalenders hinsichtlich der Sonnenbewegung wäre dieselbe wie die der offiziellen Version. Für die offizielle Version spricht ihr "Charme" und ihre Eingängigkeit beim breiten Publikum, welches der Kalender adressiert; mathematisch-astronomisch sind aber alle vier Möglichkeiten äquivalent.

Die Art und Weise des Beibehaltens oder Wegfalls von Schaltjahren in Säkularjahren wird durch die säkulare Schaltfunktion $S(K)$ beschrieben, die oben schon in der revidierten Gaußschen Osterformel auftrat. Hier formuliere ich sie mit allgemeinen natürlichzahligen Koeffizienten s_1, s_2, s_3 und s_4:

$$S(K) = -s_1 + \mathrm{int}((s_2 * K + s_3)/s_4)\ .$$

Es gilt weiter $s_2 = s$ und $s_4 = P$, weil diese Koeffizienten das Wachstumsverhalten von $S(K)$ in der Periode P steuern. $S(K)$ nimmt mit diesen Setzungen bei zunehmendem K um s Einheiten je Periode P zu. Die Koeffizienten s_1 und s_3 sind noch verfügbar. s_1 liegt in dem Moment fest (modulo 7), in dem man eine Zuordnung zwischen irgendeinem Datum und einem Wochentag getroffen hat, etwa: Der erste Tag im gregorianischen Kalender, der 15. Oktober 1582, ist ein Freitag. Daraus ergibt sich $s_1 = 2$. Die Festlegung des Koeffizienten s_3 schließlich wird durch die Festlegung auf eine der oben geschilderten vier Möglichkeiten getroffen. Wählt man die offizielle Lösung, so ergibt sich $s_3 = 3$.

Wir wollen die entstandene Funktion

$$S(K) = -2 + \mathrm{int}((3 * K + 3)/4)$$

noch etwas im Detail studieren. Da die Periode 4 Jahrhunderte beträgt, genügt es, ihre Werte für die Säkularjahre 1500 bis 1900 zu tabellieren:

Tabelle 1. Solare Säkularschaltfunktion $S(K)$

Säkularjahr X	K	$S(K)$	Delta S
1500	15	10	–
1600	16	10	0
1700	17	11	1
1800	18	12	1
1900	19	13	1
Summe Delta S = 3			

Die erste Spalte von links enthält das Säkularjahr X, die zweite die Säkularzahl K, die dritte den Funktionswert $S(K)$ und die vierte schließlich die Differenz Delta $S(K) = S(K) - S(K-1), K > 15$.

Der Funktionswert $S(K)$ gibt die Zahl der Schaltjahre an, die gegenüber der Zählweise des julianischen Kalenders entfallen sind bzw. entfallen werden. Das waren 10 auf einen Streich im Jahre 1582, entsprechend dem Anfangswert 10 von $S(K)$. Im Säkularjahr 1600 entfiel kein Schalttag. Daher bleibt $S(16) = 10$. In den Säkularjahren 1700, 1800 und 1900 entfielen jeweils der Schalttag. Daher nimmt $S(K)$ in diesen Säkularjahren um jeweils 1 zu. Die Differenz Delta von S zeigt an, ob ein Schaltjahr im Säkularjahr bleibt (Delta = 1) oder entfällt (Delta = 0). Die Summe von Delta über die Periode 4 ergibt 3, entsprechend den Säkularparametern $s = 3$ und $P = 4$. Schließlich kann $S(K)$ noch auf folgende Form gebracht werden:

$$S(K) = -2 + 3 * \mathrm{int}(K/4) + \mathrm{mod}(K, 4) \ ,$$

welche zeigt, daß $S(K)$ aus drei Bestandteilen besteht, einem konstanten Teil, einem monoton wachsenden Teil und einem zyklischen Teil. Den konstanten und den zyklischen Teil kann man die mathematischen Teile nennen, weil sie mit den mathematische Maßnahmen der Anfangswertsetzung der Wochentagszählung und der innerer Gestaltung des Säkularschaltzyklus zu tun haben; den monoton wachsenden Teil kann man den astronomischen Teil nennen, weil er die Abdrift der julianischen Kalendersonne von der realen Sonne korrigiert.

Hätte man den julianischen Kalender lediglich auf der Sonnenseite korrigiert, wie es offiziell geschah, und die Mondseite belassen, wie sie war, nämlich metonisch gezählt, dann wäre der reformierte Kalender auf der Mondseite wieder schlechter geworden, als der unreformierte zuvor war, nämlich mit einer synodischen Mondumlaufzeit von 365,2425 / (235/19) = 29,53024468... Tagen ausgestattet gegenüber dem status quo ante von 365,25 / (235/19) = 29,53085106... Tagen (der Naturwert ist 29,5305889 Tage). Der von einer beschleunigten Kalendersonne mitgerissene Kalendermond mußte also wieder gebremst werden. Dies geschah durch die lunare Säkularschaltfunktion M(K), die oben schon in der revidierten Gaußschen Osterformel auftrat:

$$M = 15 + \text{int}((3 * K + 3)/4) - \text{int}((8 * K + 13)/25)$$

Sie ist ersichtlich komplizierter gebaut als ihr Analogon auf der Sonnenseite. Da die Säkularperiode 100 Jahrhunderte oder 10.000 Jahre beträgt, wollen wir ihre Werte im Zeitraum der Säkularjahre 1500 bis 115000 untersuchen (s. Tabelle 2).

Die Tabelle 2 ist analog zur Tabelle 1 gebaut.

Der Funktionswert M(K) liefert den Beginn des für die Osterterminierung konstitutiven Mondjahres. Das zum Sonnenjahr X gehörende Mondjahr X beginnt mit dem 1. Tag im Frühlingsmonat Nisannu, das ist derjenige Mondmonat, dessen 14. Tag, der Vollmondtag, auf den 21. März fällt oder ihm als nächster Vollmondtag folgt. In denjenigen Jahren des Säkulums K, deren Goldene Zahl 1 ist, das heißt, deren Jahreszahl X durch 19 teilbar ist, fällt der 1. Nisannu X, sozusagen das Mondneujahr, auf den [8 + mod(M(K),30)]ten März. Da der reale Mond sich gegenüber der realen Sonne um etwas mehr als 2 Stunden in 19 Jahren verspätet, driftet auch das Mondneujahr der Jahre mit Goldener Zahl 1 im Laufe der Säkula immer mehr in den Sommer hinein. Ein endgültiges Abriften wird allerdings durch einen "Rücksprung in Richtung Winter" verhindert, dann nämlich, wenn der 1. Nisannu eines Jahres mit Goldener Zahl 1 die obere Grenze des 5. April (= [8 – 1 + 29 = 36]ter März) zu überschreiten droht. (Ein einem "späten" Nisannu vorhergehende Schaltmondmonat Addaru arku kann im gregorianischen Kalender jedweder Ausprägung stets nur 29 Tage umfassen.)

Die Differenz Delta von M zeigt an, ob die Epakte an der Jahrhundertgrenze geschaltet wird (Delta $\neq$ 0) oder ungeschaltet bleibt (Delta = 0). Delta = 1 bedeutet eine Epaktenverminderung, das heißt, eine Bremsung des Kalendermondes, und Delta $= -1$ eine Epaktenerhöhung, das heißt, eine Beschleunigung des Kalendermondes. Die Summe von Delta über die Periode 100 ergibt 43, entsprechend den Säkularparametern $e = 43$ und $Q = 100$.

An acht Stellen in der Tabelle 2 kommt die folgende Sequenz der Werte für Delta M vor:

$$1, 1, -1, 1, 1.$$

Dieses Muster von Bremsung, Beschleunigung und wieder Bremsung des Kalendermonds erscheint "verdächtig", ist es doch im Endeffekt äquivalent zu folgendem "Bremsmuster":

$$1, 0, 1, 0, 1.$$

In beiden Fällen ergeben sich über fünf Jahrhunderte netto gezählt drei Bremsungen des Kalendermonds. Mit der Bewegung des realen Mondes hat das verdächtige Muster jedenfalls nichts zu tun, da gregorianische Kalendertheorie stets nur mittlere Bewegungen von Sonne und Mond ins Kalkül zieht. Tatsächlich ist das verdächtige Muster Folge eines mathematischen Mißverständnisses, dem die Kalenderreformer in Ermanglung der Kalendergleichung (5) erlegen sind. Auch dieses kann ich hier im Detail aus Platzgründen nicht mehr darlegen. Aber vielleicht schenkt die Leserin oder der Leser meiner anspruchsvollen Formulierung "mathematisches Mißverständnis der Kalenderreformer" dann doch einigen Glauben,

Tabelle 2. Lunare Säkularschaltfunktion $M(K)$

Säkularjahr X	K	$M(K)$	Delta M	Säkularjahr X	K	$M(K)$	Delta M
						Übertrag:	21
1500	15	22	–	6600	66	44	1
1600	16	22	0	6700	67	45	1
1700	17	23	1	6800	68	44	−1
1800	18	23	0	6900	69	45	1
1900	19	24	1	7000	70	46	1
2000	20	24	0	7100	71	46	0
2100	21	24	0	7200	72	46	0
2200	22	25	1	7300	73	47	1
2300	23	26	1	7400	74	47	0
2400	24	25	−1	7500	75	48	1
2500	25	26	1	7600	76	48	0
2600	26	27	1	7700	77	48	0
2700	27	27	0	7800	78	49	1
2800	28	27	0	7900	79	50	1
2900	29	28	1	8000	80	49	−1
3000	30	28	0	8100	81	50	1
3100	31	29	1	8200	82	51	1
3200	32	29	0	8300	83	51	0
3300	33	29	0	8400	84	51	0
3400	34	30	1	8500	85	52	1
3500	35	31	1	8600	86	52	0
3600	36	30	−1	8700	87	53	1
3700	37	31	1	8800	88	53	0
3800	38	32	1	8900	89	53	0
3900	39	32	0	9000	90	54	1
4000	40	32	0	9100	91	55	1
4100	41	33	1	9200	92	55	0
4200	42	34	1	9300	93	55	0
4300	43	34	0	9400	94	56	1
4400	44	34	0	9500	95	57	1
4500	45	35	1	9600	96	56	−1
4600	46	35	0	9700	97	57	1
4700	47	36	1	9800	98	58	1
4800	48	36	0	9900	99	58	0
4900	49	36	0	10000	100	58	0
5000	50	37	1	10100	101	59	1
5100	51	38	1	10200	102	59	0
5200	52	37	−1	10300	103	60	1
5300	53	38	1	10400	104	60	0
5400	54	39	1	10500	105	60	0
5500	55	39	0	10600	106	61	1
5600	56	39	0	10700	107	62	1
5700	57	40	1	10800	108	61	−1
5800	58	40	0	10900	109	62	1
5900	59	41	1	11000	110	63	1
6000	60	41	0	11100	111	63	0
6100	61	41	0	11200	112	63	0
6200	62	42	1	11300	113	64	1
6300	63	43	1	11400	114	64	0
6400	64	42	−1	11500	115	65	1
6500	65	43	1				
		Übertrag:	21	Summe Delta $M = 43$			

wenn ich zeige, daß man zum Beispiel für die Säkularparameter $e = 13$ und $Q = 30$, die ich oben eingehend besprochen hatte, eine säkulare Lunarschaltfunktion $M_{\text{neu}}(K)$ konstruieren kann, die einfacher als M(K) ist und trotzdem alles Gewünschte leistet. Ich setze $M_{\text{neu}}(K)$ vom selben Typ an wie $S(K)$:

$$M_{\text{neu}}(K) = m_1 + \text{int}((m_2 * K + m_3)/m_4) .$$

Hierin sollen m_i, $i = 1, 2, 3, 4$, wieder natürliche Zahlen sein und $m_2 = 13$ sowie $m_4 = 30$. Die Koeffizienten m_1 und m_3 suche ich so zu bestimmen, daß $M_{\text{neu}}(K)$ möglichst weit vom Säkularjahr 1500 aus gerechnet mit $M(K)$ übereinstimmt. Tatsächlich gelingt dieser Ansatz und liefert $m_1 = 15$ und $m_3 = 26$. Die neue lunare Säkularschaltfunktion lautet so:

$$M_{\text{neu}}(K) = 15 + \text{int}((13 * K + 26)/30) .$$

Sie kennt keine Beschleunigungen des Kalendermondes mehr, sondern nur noch Bremsungen, und zwar 13 Stück in 3.000 Jahren, wie folgende Tabelle zeigt:

Tabelle 3. Lunare Säkularschaltfunktion $M_{\text{neu}}(K)$

Säkularjahr X	K	$M_{\text{neu}}(K)$	Delta M_{neu}	Säkularjahr X	K	$M_{\text{neu}}(K)$	Delta M_{neu}
						Übertrag:	6
1500	15	22	–	3100	31	29	1
1600	16	22	0	3200	32	29	0
1700	17	23	1	3300	33	30	1
1800	18	23	0	3400	34	30	0
1900	19	24	1	3500	35	31	1
2000	20	24	0	3600	36	31	0
2100	21	24	0	3700	37	31	0
2200	22	25	1	3800	38	32	1
2300	23	25	0	3900	39	32	0
2400	24	26	1	4000	40	33	1
2500	25	26	0	4100	41	33	0
2600	26	27	1	4200	42	34	1
2700	27	27	0	4300	43	34	0
2800	28	28	1	4400	44	34	0
2900	29	28	0	4500	45	35	1
3000	30	28	0				
		Übertrag:	6	Summe Delta M_{neu} =			13

Die Tabelle 3, die analog zur Tabelle 2 gebaut ist, zeigt im Übrigen, dass M_{neu} tatsächlich die im Abschnitt “Der flexibilisierte kallippische Zyklus” gegebene Empfehlung realisiert, nämlich “Bremsung des Kalendermondes in je 200 Jahren um etwa 1 Tag”.

Ersetzt man in der revidierten Gaußschen Osterformel die lunare Säkularschaltfunktion M(K) durch die obige Funktion $M_{\text{neu}}(K)$, so erhält man identische Osterdaten für die Jahre 1583 bis 2301. Das erste abweichende Osterdatum tritt im Jahre 2302 auf. Nach offiziellem gregorianischem Kalender fällt

Ostern in diesem Jahr auf den 20. April, während es nach dem auf der Mondseite korrigierten gregorianischen Kalender schon auf den 13. April fällt. Das frühere Fallen des Festes ist verständlich. Unterbleibt doch im korrigierten gregorianischen Kalender eine Mondabbremsung im Säkularjahr 2300. Ein Auseinanderdriften der Lunardaten im offiziellen und im korrigierten gregorianischen Kalender erfolgt ab dem Dezember 2299. Bis dahin besteht noch eine "Bedenkzeit von 296 Jahren" (= 2299–2003), ob man nicht doch die eher "unwirtschaftliche", offizielle lunare Säkularschaltfunktion mit ihren Abbremsungen und Beschleunigungen durch eine modernisierte und "beruhigte", weil von einem unnötigen Hin- und Herspringen zwischen Bremsen und Beschleunigen befreite, lunare Säkularschaltfunktion ersetzen will. Das muß übrigens nicht unbedingt die hier betrachtete Funktion $M_{\text{neu}}(K)$ sein. Man könnte zum Beispiel auch die Vorschläge von Barnaba Oriani und Milutin Milankovitch ($s = 7$ und $P = 9$) durch Konstruktion zugehöriger säkularer Schaltfunktionen im eigentlichen Sinne erst vollenden.

Die obige Anwendung der lunaren Säkularschaltfunktion $M_{\text{neu}}(K)$ in der revidierten Gaußschen Osterformel zeigt übrigens sehr klar, mit welcher *Geschmeidigkeit und Festigkeit zugleich* das *gregorianische System der Zeitzählung* auf geänderte Naturvorgaben zu antworten in der Lage ist. Sie zeigt, daß selbst bei geänderten Naturvorgaben, soweit der gregorianische Kalender überhaupt zu folgen vermag – man denke an das Kalendertrapez –, das von den Kalenderreformern als unantastbar angesehene alexandrinische Osterintervall, das zur Zeit der Kalenderreform schon eine mehr als 1000jähriger Praxis hinter sich gebracht hatte, stets gewahrt bleibt. Eine mathematische Glanzleistung allerersten Ranges, die den Kalenderreformern damit gelungen war!

Schlußbetrachtung

Die Betrachtungen meines Beitrags zeigten, mit welcher Behutsamkeit und Gewissenhaftigkeit, aber auch mit welchem Scharfsinn die Kalenderreformer 1582 vorgegangen sind. Das geschah meines Erachtens nicht allein aus Gründen politischer Klugheit, um die Einführungswiderstände für den reformierten Kalender nicht unnötig zu erhöhen, sondern auch aus *Respekt vor gewachsenen Strukturen*, wo sie schön waren und nicht reformbedürftig. Darin sehe ich den Ausdruck einer menschen- und weltfreundlichen Frömmigkeit, die das "gute Alte" nicht eo ipso, weil es alt ist, als schlecht ansieht. Der gregorianische Kalender hat den Ehrentitel eines *Juwels katholischer Gelehrsamkeit und Frömmigkeit* wahrlich verdient! – Wie anders dagegen ein moderner Reformansatz, nämlich der eingangs erwähnte des Weltkirchenrates. Der Vorschlag rühmt sich zwar, ein Vorschlag nach "modernsten wissenschaftlichen Erkenntnissen" zu sein. Aber weder das trifft zu, noch ist er behutsam zu nennen. Statt dessen wird die gesamte kunstvolle, auf babylonischen Fundamenten beruhende Mondstruktur des gregorianischen Kalenders ignoriert und abbedungen. Der Vorschlag des Weltkirchenrates hält sich dabei mit solchen "Kleinigkeiten", wie dem alexandrinischen Osterintervall, nicht auf, ja scheint den Begriff nicht zu kennen. Ostern könnte nach diesem Vorschlag sowohl vor den 22. März, als auch hinter den 25. April fallen. – Mir scheint, wenn heute

Kirchenleute gegen ein Kulturgut der Menschheit – ein solches ist der gregorianische Kalender mit seiner Sonnen- und Mondstruktur in mehr als 400jähriger Existenz und Praxis inzwischen geworden – , anrennen, vielleicht aus Gründen, die ihnen verziehen seien, nämlich aus Sorge um die Einheit der Kirchen, und weil sie es nicht besser wissen, dann sind die Mathematiker, gleich ob Christen oder nicht, aufgerufen, sich schützend vor dieses wissenschaftliche Meisterwerk, das im Schoße eben dieser Christenheit zur Zeit der ausgehenden Renaissance und der heraufziehenden Neuzeit entstanden ist, zu stellen, damit es seinen Platz in der sozialen Wirklichkeit auch künftiger Generationen bewahrt.

Literatur

1. Ahnert, Paul, Einige Bemerkungen zu den "Kalenderreformen", in: Astronomische Abhandlungen, Prof. Dr. Cuno Hoffmeister zum 70. Geburtstag gewidmet, S. 7–15, Leipzig, 1965
2. Beda Venerabilis, De temporum ratione, Corpus Scriptorum Christianorum, Series latina, t. 123 b, Turnhout, 1977
3. Clavius, Christophorus, Romani Calendarii a Gregorio XIII. P. M. restituti Explicatio, Rom, 1603, zugleich in: Opera Mathematica, t. V, Mainz, 1612. – In der 12bändigen Bibliographie von Augustin und Aloys de Backer, Bibliothèque de la Compagnie de Jésus, neu herausgegeben von Carlos Sommervogel, Brüssel und Paris, 1890 bis 1932, findet man im Band II (1891), Boulanger – Desideri, Sp. 1218, einen Hinweis auf eine schon 1595 erfolgte Ausgabe der Explicatio. Da ich jedoch nirgendwo ein Exemplar dieser Ausgabe orten konnte, eine an die Specola Vaticana, die päpstliche Sternwarte in Rom, diesbezüglich gerichtete Frage auch ergebnislos blieb, zweifele ich inzwischen an der Existenz dieser Ausgabe. Gearbeitet habe ich mit der Ausgabe 1603
4. Clavius, Christophorus, Commentaria In Euclidis Elementa Geometrica, in: Opera Mathematica, t. I, Mainz, 1611, Nachdruck mit einem Vorwort, hrsg. von Eberhard Knobloch, Hildesheim, Zürich, New York, 1999
5. Dershowitz, Nachum, and Reingold, Edward M., Calendrical Calculations, Cambridge, UK, 1997, repr. 1998
6. Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac, ed. by P. Kenneth Seidelmann, Mill Valley, Ca., 1992
7. Fraenkel, Adolf, Le Calcul de la Date de Pâques, Scientia, vol. IX, n. XVIII-2, anno V, pg. 435–439 (1911)
8. Gauß, Carl Friedrich, Berechnung des Osterfestes, Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde (August 1800), S. 121–130, zugleich in: Werke, Bd. VI, S. 73–79, Göttingen, 1874
9. Gauß, Carl Friedrich, Berichtigung zu dem Aufsatze: Berechnung des Osterfestes, Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften, Bd. 1 (Jan./Febr. 1816), S. 158, zugleich in: Werke Bd. XI, Teil I, S. 201, Berlin, 1927
10. Kinoshita, Shinji, Is the Gregorian Calendar Suitable for Use in the Era after the 20^{th} Century?, Human Welfare Studies of Hokkaido Women's University, vol. 1 (1998), pp. 101–105
11. Knobloch, Eberhard, Sur la vie et l'oeuvre de Christophore Clavius (1538–1612), Revue d'histoire des sciences, t. 41, pg. 331–356 (1988)
12. Knobloch, Eberhard, in: Storia della scienza, hrsg. vom Istituto della Enciclopedia Italiana, vol. IV, Rom, 2001, Le arti matematiche (pg. 792–825), hier Abschnitt 9, Riforma del calendario e cronologia, pg. 808–810

13. Kotter, Bonifaz, Stichwort “Osterkanon”, in: Lexikon für Theologie und Kirche, Bd. 7, Maximilian – Pazzi, Sp. 1173, Freiburg, Basel, Rom, Wien, 1998
14. Lichtenberg, Heiner, Die Struktur des Gregorianischen Kalenders, anhand der Schwankungen des Osterdatums entschlüsselt, Sterne und Weltraum, Bd. 33, S. 194–201 (1994)
15. Lichtenberg, Heiner, Zur Interpretation der Gaußschen Osterformel und ihrer Ausnahmeregeln, Historia Mathematica, vol. 24, pp. 441–444 (1997)
16. Lichtenberg, Heiner, The Gregorian Calendar: An Adaptable Cyclic Lunisolar Timereckoning System for the Millennia, Human Welfare Studies of Hokkaido Women’s University, vol. 2, pp. 137–148 (1999)
17. Milankovitch, Milutin, Das Ende des julianischen Kalenders und der neue Kalender der orientalischen Kirchen, Astronomische Nachrichten, Bd. 220, Nr. 5279, Sp. 379–384 (1923/24)
18. Oriani, Barnaba, De usu fractionum continuarum ad inveniendos Ciclos Calendarii novi & veteris, Ephemeridae Astronomicae Anni 1786, pg. 132 - 154, Mailand, 1785
19. Perron, Oskar, Die Lehre von den Kettenbrüchen, 2., verb. Auflg., München 1929, Nachdruck New York, ohne Jahr
20. Reich, Karin, Problems of calendar reform from Regiomontanus to the present, in: Zinner, Ernst, Regiomontanus, His life and work, transl. by Ezra Brown, pp. 345–362, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo, 1990
21. Swerdlow, Noel, The Origin of the Gregorian Civil Calendar, Journal for the History of Astronomy, vol. 5, pp. 48–49 (1974)
22. Weltkirchenrat (Hg.), Towards a Common Date of Easter, Aleppo (Syrien) 1997
23. Zemanek, Heinz, Kalender und Chronologie, Bekanntes und Unbekanntes aus der Kalenderwissenschaft, 5., verb. Auflg., München, Wien, 1990