

DLR_School_Lab

**Regionale Fortbildung für Schulen in Niedersachsen
im DLR_School_Lab Göttingen
14. August 2002**

Realitätsbezogener Mechanikunterricht durch Beiträge der Strömungsphysik

**Beobachtung, Analyse und Beschreibung von realen
Fallbewegungen**

Referent:

StR Mathias Schäfer

DLR_School_Lab / Geschwister-Scholl-Gesamtschule Göttingen

Unterfeldring 23

37083 Göttingen

Telefon (0551) 795540

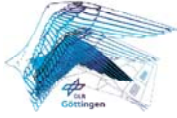
E-Mail mathias.schaefer@dlr.de

Deutsches Zentrum für
Luft- und Raumfahrt e.V.
DLR_School_Lab
Bunsenstraße 10
37073 Göttingen

Telefon: (0551) 709 - 2132 /- 2405
Fax: (0551) 709 - 2439
Internet www.schoollab.dlr.de
E-Mail: schoollab@dlr.de

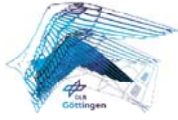
Verlaufsplanung:

1. Begrüßung
2. Vorstellung der Teilnehmer und Formulierung von Erwartung
3. Mögliche Problemstellungen für den Unterricht zum Thema „Fallvorgänge“
4. Didaktische Erwartungen an den Physikunterricht
5. Exemplarische Problemstellung: Wie fallen schnell fallen Regentropfen?
 - a) Modell I : Freier Fall
 - b) Modell II : Fall mit Luftreibung
 - c) Exkurs: Strömungsphysikalische Widerstandskräfte (fachliche Hintergrundinformationen und Anwendungsbezüge)
 - d) Ergebnisinterpretation
6. Erstellen eines Simulationsprogramms (EXCEL) des Fallvorgangs am Computer in Kleingruppen
7. Ergebnis- und Erfahrungsaustausch
8. Videoaufzeichnung einer realen Fallbewegung (Tischtennisball)
9. Videoanalyse dieser Bewegung mit Viana 3.0 in Kleingruppen
10. Auswertung und Abschlussgespräch



Mögliche Problemstellungen für den Unterricht:

- **Wie schnell fallen Regentropfen zu Boden? Wie kann ihre Fallbewegung in einem Modell beschrieben und mit dem Computer / CAS –Taschenrechner simuliert werden?**
- Mit welcher Geschwindigkeit trifft ein Tennisball auf den Boden auf, wenn er von einem 20 m hohem Turm fällt?
- **Wie schnell fällt ein Fallschirmspringer?**
- **Wie lange benötigt der Staub eines Vulkanausbruchs, um aus 20 km Höhe zum Boden zu gelangen?**
- **Wie groß ist die Treibstoffeinsparung, wenn man mit einem Auto 120 km/h statt 160 km/h fährt?**
- **Welche technische Bedeutung hat der c_w - Wert eines Autos?**
- Wie kann man die Fallbewegung eines Badmintonballs analysieren und seinen c_w –Wert im Unterricht experimentell bestimmen?
- **Weshalb besitzt ein Golfball kleine Dellen (dimples), aber ein Tischtennisball nicht?**
- Wie bestimmte Robert A. Millikan bereits vor hundert Jahren durch Anwendung strömungsmechanischer Gesetzmäßigkeiten zuerst die elektrische Elementarladung?
- **Wie kann die Flugbahn eines Balles unter dem Einfluss der Luftreibung im Modell simuliert werden?**
- **Welchen Einfluss hat die Masse eines Balls bei gleicher Form und Größe auf die Fallbewegung in Luft und im Vakuum?** (Experiment: Gleichzeitiges Fallen eines normalen und eines beschwerten (mit Sand gefüllten) Tischtennisballes.)



Didaktische Forderungen an den Physikunterricht:

- Interessante Beispiele und Anwendungen aus dem Alltag thematisieren
- Methodenvielfalt
- Fächerverbindende Aspekte aufzeigen
- Vernetzung von Wissen aus verschiedenen Themenbereichen der Physik/Naturwissenschaften
- Integration neuer Medien, Medienkompetenz
- Eigenständiges Experimentieren
- Entwicklung von Problemlösestrategien und Modellen
- Einbindung außerschulischer Institutionen/Experten

1. Wie schnell fallen Regentropfen aus 400 m Höhe zu Boden ?

a) **Modell I: Freier Fall (ohne Luftreibung):**

$$\begin{aligned}
 v &= \sqrt{2gh} \\
 &= 89 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{mit : } h = \text{Fallhöhe; } g = 9,81 \text{ m/s}^2 \\
 &= 319 \text{ km/h}
 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist fragwürdig! Die Regentropfen würden aufgrund dieser hohen Geschwindigkeit auf der Erde wohl größeren Schaden anrichten.

b) **Modell II: Beschleunigte Bewegung mit Luftreibung:**

Qualitative Analyse der Vorgänge:

Zu Beginn der Fallbewegung ist der Einfluss der Luftreibung durch die noch geringe Geschwindigkeit zunächst gering. Der Tropfen fällt nahezu im Freien Fall.

Mit zunehmender Fallgeschwindigkeit wächst auch die Luftwiderstandskraft F_L an und wirkt damit der Gewichtskraft F_G des Tropfen immer wirkungsvoller entgegen. Die Gesamtkraft und damit die Beschleunigung des Tropfens werden also stets geringer, bis sich schließlich ein Gleichgewichtszustand beider entgegenwirkenden Kräfte eingestellt: Für die Beträge der Kräfte gilt also: $F_G = F_L$.

Der Tropfen fällt nun mit konstanter Endgeschwindigkeit v_e (gleichförmige Bewegung) zu Boden.

Problem:

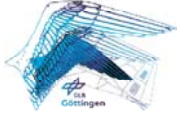
Wie verhält sich die an einem umströmten Körper angreifende Widerstandskraft in Abhängigkeit von der Strömungsgeschwindigkeit?

Exkurs: Widerstandskraft in Strömungen

Für alle Strömungszustände wird die Widerstandskraft F_L wie folgt angegeben:

$$F_L = c_w \frac{1}{2} \rho v^2 A$$

mit: c_w = dimensionsloser Widerstandsbeiwert
 ρ = Dichte des strömenden Mediums
 v = Strömungsgeschwindigkeit
 A = Querschnittfläche des umströmten Körpers (senkrecht zur Strömungsrichtung)



Bemerkungen:

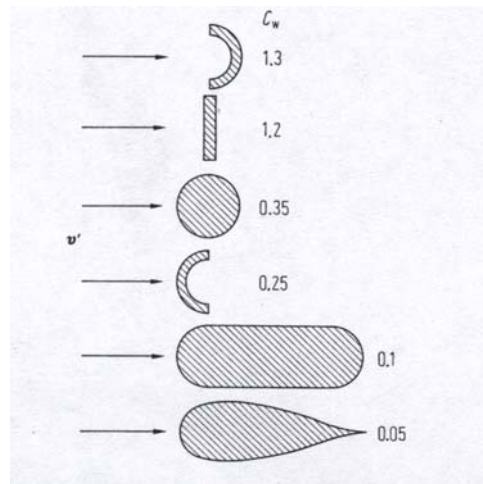
- i) Der Term $\frac{1}{2} \rho v^2$ entspricht der Bewegungsenergie der Strömungsteilchen pro Volumeneinheit (siehe Anhang A) und besitzt somit die Einheit eines Drucks. Er wird deshalb in der Strömungsphysik als „Staudruck“ p_{stau} bezeichnet. Dieser entsteht formal durch vollständiges Abbremsen der Strömungsteilchen beim Auftreffen auf die gedachte ebene Querschnittsfläche A. Die kinetische Energie der Strömungsteilchen wird in die Energieform „Druck“ als potentielle Energie umgewandelt. Mit Hilfe des Prandtl'schen Staurohrs kann dieser Staudruck direkt mit einem Manometer als Differenz zwischen Gesamtdruck und statischem Druck gemessen werden, um daraus die Strömungsgeschwindigkeit (z.B. Fluggeschwindigkeit beim Flugzeug) bei bekannter Dichte des Mediums zu ermitteln.

Multipliziert man schließlich den Staudruck mit der Querschnittsfläche A, so erhält man formal eine Staukraft, welche in Strömungsrichtung auf diese Fläche wirkt.

- ii) Der Widerstandsbeiwert c_w kann anschaulich als dimensionsloser Verhältniswert zwischen der gedachten Staukraft (siehe Bem. i)) und der tatsächlich am umströmten Körper auftretenden Widerstandskraft F_L aufgefasst werden.

Der c_w – Wert eines umströmten Körpers wird dabei – innerhalb gewisser Gültigkeitsgrenzen – im Wesentlichen durch die Form des umströmten Körpers festgelegt: Bei einem stumpfen Körper (z.B. Kreisplatte) ist die Widerstandskraft im Vergleich mit der gedachten Staukraft größer als bei einem abgerundeten oder spindelförmigen Körper mit gleicher Querschnittsfläche. Bei diesen strömungsgünstigeren Körperformen treffen die meisten Strömungsteilchen nicht senkrecht auf die Querschnittsfläche, sondern werden durch den Körper seitlich umgelenkt und nur teilweise abgebremst. Bei Körpern mit scharfkantigen Begrenzungen (Platte, Quader) oder sich relativ abrupt verändernden Körperformen (Kugel) treten in der Nachlaufströmung hinter den Körpern starke Verwirbelungen auf, die aus energetischen Gründen den Widerstandsbeiwert ebenfalls erhöhen. Autos werden deshalb möglichst stromlinienförmig geformt, um einen guten c_w - Wert und damit eine geringe Luftwiderstandskraft zu erzielen. Diese Widerstandsart wird als **Formwiderstand** bezeichnet.

An Tragflügelenden eines Flugzeugs treten Randwirbel auf, da sich dort die Druckverhältnisse von Ober- und Unterseite durch Luftströmungen ausgleichen können. Dieser zusätzlich erzeugte Widerstand heißt **induzierter Widerstand**.



(aus: Bergmann-Schaefer; S.532)

Abb.: Widerstandsbeiwerte von rotationssymmetrischen Körpern bei $Re \approx 1000$

Der Widerstandsbeiwert hängt im allgemeinen aber neben der Körperform auch von der Strömungsform (laminar, turbulent) ab. Das Strömungsverhalten wird durch die jeweilige **Reynoldszahl Re** einer Objektumströmung charakterisiert. Weiterhin geht auch Oberflächenrauigkeit (**Reibungswiderstand**) des umströmten Körpers in den Widerstandsbeiwert ein. (siehe Anhang B).

iii) **Spezialfall: Newton-Reibung**

In großen Bereichen der Reynoldszahl kann der **Widerstandsbeiwert** jedoch für eine feste Körperform näherungsweise als **konstant** angesehen werden. So beträgt er z.B. für glatte Kugeln im Bereich $1000 < Re < 100\,000$ ungefähr $c_w = 0,4$. Die Widerstandskraft ist für diesen Gültigkeitsbereich also näherungsweise proportional zum Quadrat der Strömungsgeschwindigkeit. Dies gilt in der Praxis bei turbulenten Strömungen, also für größere Körper mit relativ schneller Bewegung durch eine Flüssigkeit oder ein Gas.

iv) **Spezialfall: Stokes-Reibung**

Für sehr kleine Reynoldszahlen, bei denen das Strömungsverhalten (laminare Strömung) hauptsächlich durch Reibungseffekte (Zähigkeit) zwischen den Strömungsteilchen bestimmt wird, sind die c_w -Werte jedoch stark von der Reynoldszahl (und damit auch stark von der Strömungsgeschwindigkeit) abhängig (siehe Anhang B).

Für glatte Kugeln fand George Gabriel Stokes (1819 – 1903) im Bereich $Re \leq 1$ die

$$\text{Beziehung } c_w = \frac{24}{Re}$$

$$\text{Setzt man } Re = \frac{\rho v d}{\eta} \quad (\text{mit } d = 2r, \text{ Durchmesser der Kugel) und } A = 2\pi r^2$$

(Querschnittsfläche der Kugel) in die obige allgemeingültige Widerstandsbeschreibung für F_w ein, so erhält man für Kugeln mit dem Radius r :

$$F_w = 6 \pi \eta r v$$

Sehr kleine Kugeln, die sich langsam durch eine Flüssigkeit oder ein Gas bewegen, erfahren eine Widerstandskraft, die proportional zur Geschwindigkeit ist.

Beispiele: Nebeltröpfchen in Luft, Staub in der Atmosphäre, Öltröpfchen in Luft (Millikan-Versuch), Kugelfall - Viskosimeter, Einzeller in Wasser, Absinken von Kugelalgen in Wasser

Fortsetzung der Problemstellung:

Bestimmung der Fallgeschwindigkeit der Regentropfen

Für die Widerstandskraft der Luftströmung wird der Spezialfall der Newton-Reibung für einen näherungsweise kugelförmigen Tropfen mit konstantem Widerstandsbeiwert von $c_w = 0,35$ angenommen:

Weitere Daten:

- Wähle: Durchmesser des Tropfens $d = 2 \text{ mm}$; also $r = 1 \text{ mm}$
- Dichte von Wasser $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$
- Dichte von Luft $\rho_L = 1,292 \text{ kg/m}^3$
- Formel: Kugelvolumen $V = \frac{4}{3} \pi r^3$
- Formel: Kreisfläche $A = \pi r^2$

Die Endgeschwindigkeit v_E ergibt sich aus dem Kräftegleichgewicht $F_L = F_G$:

$$\frac{1}{2} c_w \rho_L v_E^2 A = m g$$

Mit $m = \rho_w V = \rho_w \frac{4}{3} \pi r^3$ und $A = \pi r^2$ erhält man:

$$v_E = \sqrt{\frac{8 r g \rho_w}{3 c_w \rho_L}} = \mathbf{7,61 \text{ m/s}} = 27,4 \text{ km/h}$$

Dieses Ergebnis von Modell II ist eher realistisch als im Falle von Modell I.

Vertiefte Interpretation des Ergebnisses:

Welchen Einfluss hat die Fallhöhe auf die Aufprallgeschwindigkeit?
Gibt es Gültigkeitsgrenzen für das erhaltene Ergebnis?

Problemstellung:

Welche Fallstrecke wird benötigt, um mindestens 99% der Endgeschwindigkeit zu erreichen?

Lösungsidee:

Simulation der Bewegung durch zeitliche Iteration der physikalischen Größen Geschwindigkeit und Strecke mit Hilfe eines Tabellen-kalkulationsprogramms oder eines CAS –Taschenrechners.

Man verwendet dazu in jedem Iterationsschritt (Tabellenzeile) folgende Rechenschleife: **(Simulation Typ 1)**

- 1) $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ (Zeitschritt der Uhr)
- 2) $a_{n+1} = \frac{F_n}{m}$ (2. Newton' sches Axiom; F ist Gesamtkraft)
- 3) $v_{n+1} = v_n + a_{n+1} \Delta t$ (Geschwindigkeitszuwachs $\Delta v = a \cdot \Delta t$, da $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ Durchschnittsbeschleunigung ist)
- 4) $F_{n+1} = mg - \frac{1}{2} \rho_L v_{n+1}^2 A c_w$ (Gesamtkraft = Gewichtskraft – Widerstandskraft)
 $= \rho_w \frac{4}{3} \pi r^3 - \frac{1}{2} \rho_L v_{n+1}^2 \pi r^2 c_w$

Die Zeitschritte sollten nicht zu groß gewählt werden, da dieser Algorithmus sonst instabil werden kann!

Alternativ ergibt sich ein stabiler, aber komplizierterer Algorithmus wie folgt: **(Simulation Typ 2)**

Aus der dynamischen Kraftdefinition kann man die zeitliche Entwicklung der Geschwindigkeit erschließen:

$$F = m \cdot a = m g - k v^2 \quad \text{mit } k := \frac{1}{2} \rho A c_w$$

$$\rightarrow a = g - \frac{k}{m} v^2 \quad \rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} = g - \frac{k}{m} v^2 \quad \rightarrow \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} = g - \frac{k}{m} \cdot v_n^2$$

$$\rightarrow v_{n+1} - v_n = g \Delta t - \frac{k}{m} \cdot \Delta t \cdot v_n^2 \quad \rightarrow$$

$$v_{n+1} = g \cdot \Delta t + \left(1 - \frac{k}{m} \cdot \Delta t \cdot v_n\right) \cdot v_n$$

Die Simulationen können im Unterricht arbeitsteilig auch für andere fallende Körper (z.B. verschiedene Bälle des Sportunterrichts) erstellt und ihre Gültigkeit mit Videoanalysen realer Fallvorgänge dieser Objekte verglichen werden. Beispiele für Videosequenzen und vergleichende Simulationen sind zusammen mit einem frei zugänglichen Videoanalyseprogramm Viana 3.0 sowie einem selbsterstellten Simulationsprogramm in EXCEL auf der anliegenden CD-ROM angegeben.

Anhang A: Herleitung des Staudrucks

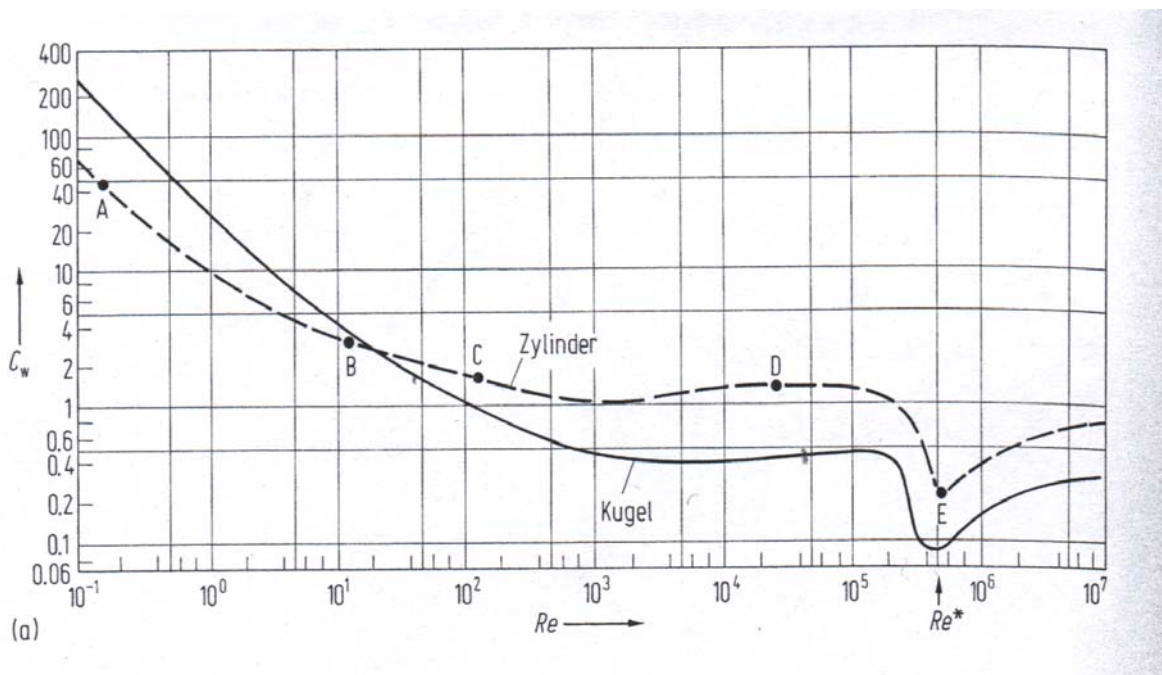
Die Bewegungsenergie von Luftteilchen der Masse m beträgt $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$, wenn sich alle Teilchen mit der gleichen Geschwindigkeit v bewegen. Die Masse der Luftteilchen in einem bestimmten Volumen V und der Dichte ρ beträgt $m = \rho \cdot V$.

Bestimmt man nun die Bewegungsenergie der Luftteilchen pro Volumeneinheit, so erhält

$$\text{man } E_{\text{kin}}^* = \frac{1}{2} \rho V v^2 \cdot \frac{1}{V} = \frac{1}{2} \rho v^2 .$$

Der Staudruck entspricht also der Bewegungsenergie der Strömungsteilchen im Einheitsvolumen 1 m^3 .

Anhang B: Widerstandsbeiwerte in Abhängigkeit von der Reynoldszahl



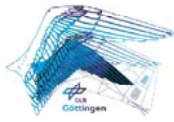
(aus: Bergmann-Schaefer; S. 528)

Abb.: Widerstandsbeiwert von Kugel und Zylinder in Abhängigkeit von der Reynoldszahl Re

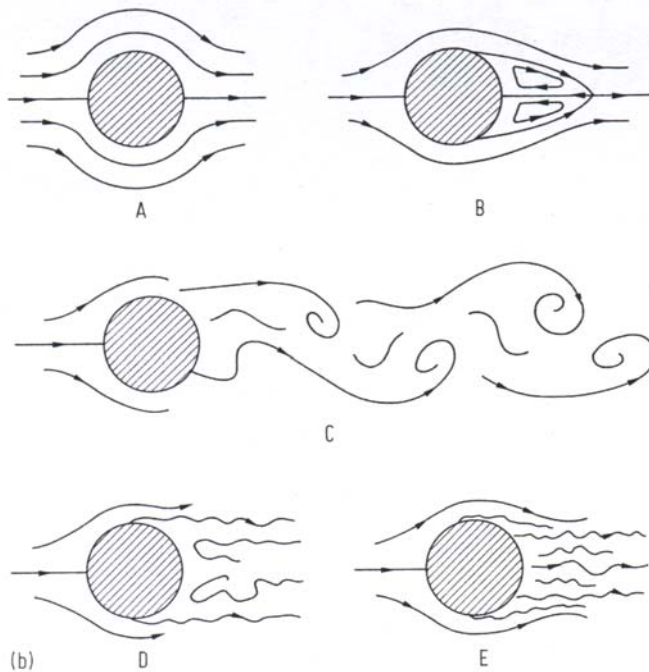
Für Kugeln nennt man den Bereich $Re < 250\,000$ unterkritisch (laminare Grenzschicht) und den Bereich $Re > 300\,000$ überkritisch (turbulente Grenzschicht).

Die Angabe von Widerstandsbeiwerten ist also nur in Verbindung mit dem zugehörigen Reynoldszahlenbereich sinnvoll. Fehlen solche Angaben sind meistens objekttypische Geschwindigkeitsbereiche gemeint:

Objekt:	c_w
----------------	-------



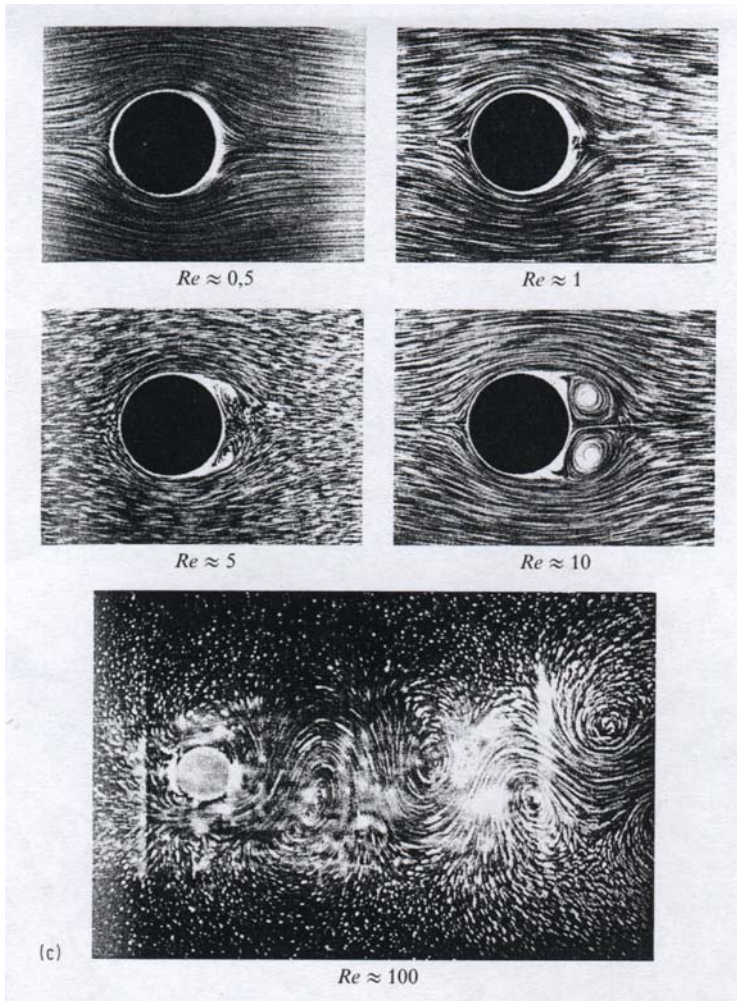
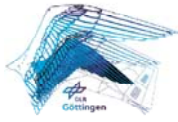
Fallschirm	1,4	
Parabolantenne	1,0	(ANSTRÖMUNG VON VORNE)
Flatternde Fahne	0,12	
Bürohochhaus	1,4	
Eisenbahnzug	1,8	
Radfahrer	1,1	
Lkw	0,96	
Pkw	0,3	
Baum	0,43	
Mensch	1,2	
Delphin	0,0036	
Großer Vogel	0,40	
Eselspinguin	0,04	
Gelbrandkäfer	0,36	



(aus: Bergmann-Schaefer; S. 528)

Abb.: Strömungszustände um einen Zylinder bei verschiedenen c_w -Werten in Abb.

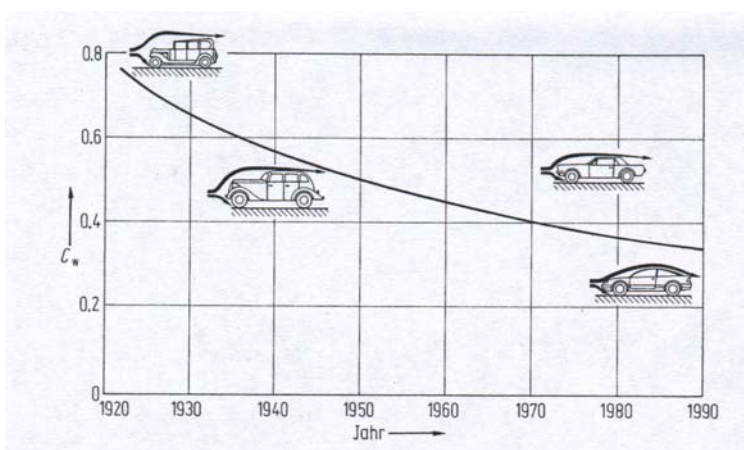
- A: laminare, wirbelfreie Strömung
- B: laminare Strömung mit zwei stationären Wirbeln
- C: laminare Strömung, periodische Wirbelablösung und Karman' sche Wirbelstraße im Nachlauf
- D: turbulente Strömung hinter dem Zylinder, aber noch laminare Grenzschicht
- E: turbulente Strömung hinter dem Zylinder, turbulente Grenzschicht



(aus: Bergmann-Schaefer; S 529)

Abb.: Strömungsbilder am Zylinder bei verschiedenen Reynoldszahlen

Anhang C: Widerstandsbeiwerte bei Autos:



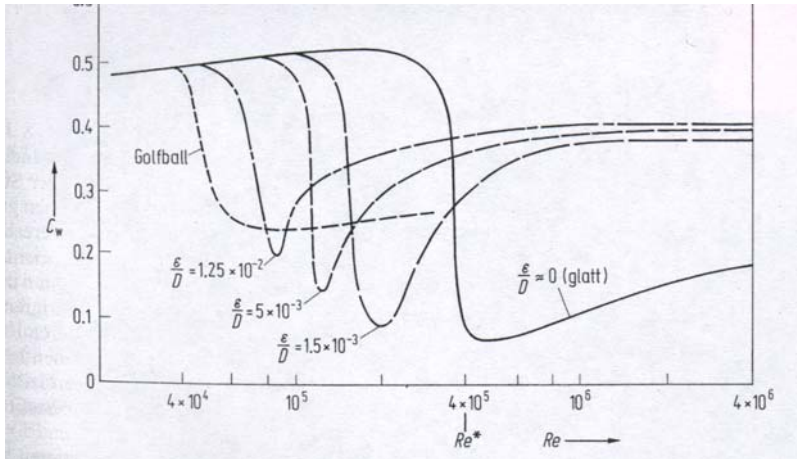
(aus: Bergmann-Schaefer; S.532)

Abb.: Widerstandsbeiwerte typischer Automobilformen im Laufe der Entwicklung

Widerstandsbeiwerte im Bereich $0,2 < c_w < 0,3$ gelten für heutige Fahrzeuge bereits als sehr gut. Die kantige „Ford Lizzy“ von 1925 hatte noch einen sehr großen Beiwert von 1, der legendäre VW-Käfer von 1970 besitzt einen Beiwert von 0,46. Als erstes Serienauto unterschritt der Audi 100 in den 80er Jahren den Beiwert von 0,3. Gute Vogelrumpfe bei typischen

Fluggeschwindigkeiten ($Re \approx 10\,000$) liegen im Vergleich bei $c_w = 0,15$. (siehe Nachtigall: Biomechanik, S. 231)

Anhang D: Warum hat ein Golfball Dellen?

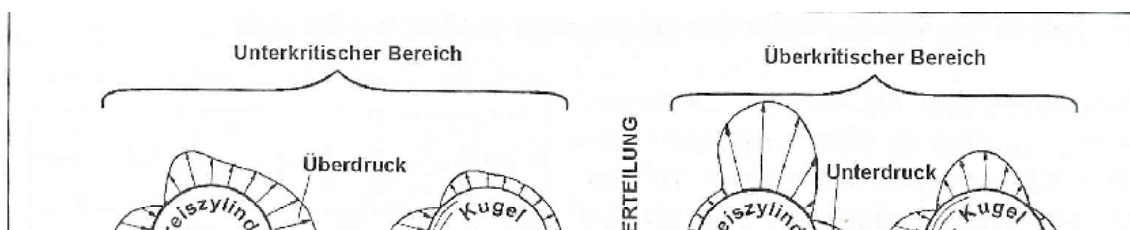


(aus: Bergmann-Schaefer; S.533)

Abb.: Einfluss der Oberflächenrauigkeit auf die Widerstandskraft

Durch die raue Oberfläche wird die Grenzschicht eines luftumströmten Golfballs turbulent. Dadurch wird der Grenzschichtströmung Energie zugeführt und der Ablösepunkt der Strömung am verlagert sich weiter auf die Rückseite des Balls, wodurch das turbulente Nachlaufgebiet schmaler wird und sich der Formwiderstand verringert. Dieser Effekt überwiegt gegenüber der Zunahme des Reibungswiderstandes bei kugelförmigen Körpern.

Langsam fliegende Tischtennisbälle besitzen eine Umströmung mit kleinerer Reynoldszahl als Golfbälle, so dass eine künstliche Oberflächenrauigkeit nach dem obigen Diagramm nicht zu turbulenten Grenzschichten führt, sondern nur den Anteil des Reibungswiderstands erhöhen würde.



(aus: Werner Nachtigall: Biomechanik, S. 228)

Anhang E: Welche Bedeutung hat Reynoldszahl?

Die Reynoldszahl Re gibt das Verhältnis zwischen Trägheitskräften bei der Beschleunigung der Strömung und den Reibungskräften aufgrund der Zähigkeit der des Strömungsmediums bei der Umströmung eines Körpers an. Somit charakterisiert Re die Strömungsform (laminar, verwirbelt, turbulent) um einen Körper.

$$\text{Es gilt: } Re := \frac{\rho v l}{\eta}$$

mit: ρ = Dichte des strömenden Mediums
 v = Strömungsgeschwindigkeit der ungestörten Strömung
 l = charakteristische Körperlänge einer Körperform (z.B. Durchmesser bei Kugeln oder Zylindern)

η = Viskosität (dyn. Zähigkeit) des Strömungsmediums
 Luft (0°C, 1013 hPa): $\eta = 0,0000172 \text{ Pa s}$
 Wasser (20°C): $\eta = 0,001002 \text{ Pa s}$
 Wasser (0°C): $\eta = 0,00172 \text{ Pa s}$

Typische Reynoldszahlen für biologische und technische Objekte:

10^{-4}	Absinkende Nebeltröpfchen oder Kleinalgen
10^{-3}	Schwimmende Bakterien
10^{-1}	Schwimmhaare von Wasserkäfern und Flügel kleinster Insekten
10^3	Honigbienen und Fliegen
10^5	Vögel und Fische, technische Kleinlüfter
10^6	Pinguine, ausgleitend
$10^7 - 10^8$	Pinguine, Wale, Flugzeuge, Luftschiffe
$> 10^9$	Atmosphärische Wirbel

(aus: Werner Nachtigall, S. 224)

Anhang F: Objektdaten der Fallobjekte in den DLR Videoclips

Objekt	Masse in g	Durchmesser in mm
Tennisball	55,9	63,7
Tischtennisball (normal)	3,0	39,6
Tischtennisball (groß)	5,5	54,5
Tischtennisball (schwer) (mit Sand gefüllt)	56,0	39,6
Softball	11,3	67,5
Stahlkugel	28,3	19,0

Literatur:

1. Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. 1, Mechanik, Relativität, Wärme, 1998, 11. Auflage, de Gruyter Berlin
2. Nachtigall: Biomechanik, Vieweg 2000

-
-
3. Nordmeier: Videoanalyse von Bewegungen mit dem Computer; in: Unterricht Physik 13, 2002, S. 129